



The Effect of a Multiple-Solution Approach to Solving Open-Ended Mathematical Modeling Problems on Students' Independence and Self-Efficacy

Masoom Gholami¹, Nasim Asghary^{2*}, Leila Golshani¹

1. Department of Mathematics, CT.C., Islamic Azad University, Tehran, Iran.
2. Department of Mathematics, CT.C., Islamic Azad University, Tehran, Iran (Corresponding Author).

❖ Corresponding Author Email: Nas.Asghari@iauctb.ac.ir

Research Paper	Abstract
Receive: 2026/02/21 Accept: 2026/04/20 Publish: 2026/08/11	Purpose: This study aimed to determine the effect of a multiple-solution approach to open-ended mathematical modeling problems on the independence and self-efficacy of ninth-grade female students. Methodology: An explanatory mixed-methods design was employed, comprising a one-group quasi-experimental pretest–posttest component with repeated assessments and a qualitative case study. The participants were 76 ninth-grade female students selected through convenience sampling from a public school in District 3 of Tehran. The intervention consisted of seven 45-minute sessions involving explicit instruction in the mathematical modeling cycle, open-ended problems containing sufficient, missing, or irrelevant data, and the generation and comparison of multiple solutions in heterogeneous groups of three or four students. Mathematical independence was assessed using a six-item, five-point Likert questionnaire. Cronbach's alpha coefficients across the assessment sessions ranged from 0.842 to 0.936. Semi-structured interviews were also conducted with nine purposively selected students representing low, moderate, and high levels of mathematical performance. Quantitative data were analyzed using the Friedman test. Findings: The Friedman test demonstrated statistically significant session-related changes in five of the six mathematical independence items. The significance levels for these items ranged from 0.008 to 0.049, and their mean ranks generally increased across the intervention sessions. One questionnaire item did not show a statistically significant difference across sessions ($p=0.069$). Friedman statistics for the significant items ranged from 9.514 to 13.931, indicating significant improvements in dimensions associated with organizing learning activities, choosing participation and problem-solving strategies, making independent decisions, and reviewing and correcting solutions without direct dependence on the teacher. Conclusion: Integrating explicit mathematical modeling instruction with open-ended tasks, multiple-solution strategies, and small-group collaborative learning can strengthen students' learning independence and perceived self-efficacy. By allowing students to select strategies, articulate personal ideas, evaluate alternative solutions, and assume responsibility for correcting their work, this instructional approach can facilitate a transition from teacher-dependent learning toward active, self-directed mathematical learning.
Keywords: Mathematical modeling; Open-ended problems; Multiple-solution approach; Learning independence; Self-efficacy; Collaborative learning	
Article Cite: Gholami, M., Asghary, N., & Golshani, L. (2027). The Effect of a Multiple-Solution Approach to Solving Open-Ended Mathematical Modeling Problems on Students' Independence and Self-Efficacy. <i>Sociology of Education</i>. 13(2): 1-21.	



<https://doi.org/10.61838/kman.soe.802>



Commons: CC BY 4.0

Detailed Abstract

Introduction

Contemporary mathematics education has increasingly moved beyond the transmission of formulas, algorithms, and predetermined procedures toward the development of mathematical thinking, reasoning, decision-making, and the application of knowledge to authentic situations. From this perspective, mathematical competence is not limited to obtaining correct answers; it also involves understanding the problem situation, selecting relevant information, constructing mathematical representations, choosing appropriate strategies, monitoring the solution process, and evaluating the reasonableness of the final result. Learning to think mathematically requires students to coordinate cognitive, metacognitive, and strategic resources when confronting unfamiliar tasks rather than merely reproducing previously demonstrated procedures (Schoenfeld, 2016). Similarly, mathematical literacy emphasizes the capacity to formulate, employ, and interpret mathematics in personal, educational, and social contexts (Stacey, 2015). Accordingly, mathematics classrooms should provide learning opportunities through which students become active agents who can generate, justify, evaluate, and revise mathematical ideas.

Problem solving represents a central mechanism for achieving these educational objectives. Recent evidence indicates that mathematical problem-solving ability is associated with a combination of cognitive, motivational, and dispositional factors. Intellectual curiosity may strengthen adolescents' mathematical problem solving by encouraging exploration, sustained cognitive engagement, and willingness to investigate alternative possibilities (Wang et al., 2026). Creative and critical thinking are likewise related to mathematical achievement through the mediating role of problem solving, indicating that successful mathematical performance requires the generation and evaluation of ideas rather than the mechanical application of routines (Yousefpour et al., 2024). Engagement with controversial or cognitively demanding mathematical problems can further promote critical examination of data, assumptions, and competing arguments (Suryawan et al., 2024). The importance of problem solving begins in the early years, as developmentally appropriate problem situations can strengthen foundational concepts such as counting and seriation among young learners (Torres-Pena et al., 2025). Problem-based educational resources are therefore increasingly regarded as necessary for connecting mathematical learning with meaningful personal and global contexts (Subramaniam & Rajoo, 2025).

Mathematical modeling provides a particularly appropriate environment for problem-centered learning because it connects formal mathematical knowledge with complex situations derived from everyday life. Modeling involves understanding and simplifying a real-world situation, identifying variables and relationships, making assumptions, translating the situation into mathematical form, performing mathematical operations, interpreting the results, and validating the model. Models-and-modeling perspectives conceptualize students as active constructors of systems of mathematical relationships and representations rather than passive users of procedures (Lesh & Doerr, 2003). Mathematical modeling competence consequently includes the coordinated ability to understand contexts, mathematize relationships, select methods, interpret results, and evaluate the adequacy of proposed models (Lesh et al., 2013). Modeling and applications also reduce the separation between school mathematics and practical decision-making by requiring learners to use mathematics for understanding and responding to real situations (Niss et al., 2007).

Open-ended modeling problems possess particular instructional value because they do not necessarily contain a single predetermined method or uniquely correct final response. Some include irrelevant information that students must identify and disregard, while others contain missing information that requires reasonable estimation or assumption-making. Even when the available information is sufficient, multiple representations and strategies may be used. Realistic mathematics education has demonstrated that contextualized problems can improve secondary students' problem-solving skills by enabling them to construct rather than receive mathematical solutions (Ventistas et al., 2024). Moreover, problem posing and problem solving are mutually reinforcing processes because modifying assumptions, completing incomplete situations, or generating related questions can deepen students' understanding of the structure of mathematical problems (Geteregechi, 2025).

The multiple-solution approach extends the potential of open-ended modeling by explicitly encouraging students to generate, compare, and evaluate different methods. Multiple-solution tasks can improve conceptual understanding, cognitive flexibility, and awareness of the structural relationships among numerical, algebraic, geometric, graphical, and verbal representations (Leikin & Zaslavsky, 2013). Effective mathematics teaching similarly requires students to engage in productive intellectual struggle, explain their reasoning, and establish connections among mathematical ideas rather than simply follow demonstrated procedures (Hiebert & Grouws, 2007). Productive classroom discussions must therefore be intentionally organized so that selected solutions are presented in a meaningful

sequence and the relationships among alternative methods are made explicit (Stein & Smith, 2011). When such discussions occur in small cooperative groups, students can articulate their reasoning, examine the ideas of peers, negotiate disagreements, and assume shared responsibility for understanding (Sharan, 2015).

These instructional characteristics are theoretically related to learning independence and self-efficacy. Independent learners are able to establish goals, organize their activities, choose strategies, monitor progress, and revise their performance in response to feedback (Zimmerman, 2002). Self-regulated learning frameworks further emphasize the interaction of cognition, motivation, behavior, and contextual conditions in students' management of learning (Pintrich, 2004). Such competencies develop most effectively when students practice regulation within meaningful classroom activities rather than receive decontextualized instruction about study skills (Paris & Paris, 2001). Autonomy-supportive environments can also strengthen engagement by providing meaningful rationales, acknowledging students' perspectives, and allowing initiative and choice (Reeve, 2012). Organizational interactions and decision-making structures may influence the implementation of such educational practices (Taghizadeh & Shokri, 2013), while supportive leadership, trust, and institutional commitment may facilitate the sustained adoption of student-centered innovation (Taghizadeh & Shokri, 2014).

The relevance of these issues is particularly evident in curriculum design. Comparative analyses of TIMSS 2019 mathematics problems and Iranian and Japanese textbooks have highlighted the need to consider not only content coverage but also the cognitive demand, application requirements, and problem structures presented to students (Yaftian & Abbasi, 2024b). Further analysis of alignment between published TIMSS tasks and national textbooks similarly suggests that meaningful mathematical competence requires opportunities for reasoning and application beyond routine exercises (Yaftian & Abbasi, 2024a). Against this background, the present study examined whether combining explicit modeling instruction, open-ended tasks, multiple-solution strategies, and small-group collaboration could enhance ninth-grade students' independence and self-efficacy in mathematics.

Methods and Materials

The study employed an explanatory mixed-methods design in which quantitative findings were complemented and interpreted through qualitative evidence. The quantitative component followed a quasi-experimental repeated-measures structure involving assessments across the instructional sessions, whereas the qualitative component was conducted as a case study of students' experiences during the intervention. The participants were 76 ninth-grade female students recruited through convenience sampling from a public school in District 3 of Tehran. The students had relatively similar previous mathematics achievement, with their eighth-grade mathematics scores generally ranging from 19 to 20. Data were collected during the second half of the 2023–2024 academic year.

The intervention was delivered by the researcher in seven 45-minute sessions conducted outside regular classroom hours. The instructional program focused on explicit teaching of the mathematical modeling process and the use of multiple solutions for open-ended problems associated primarily with the Pythagorean theorem. The modeling sequence included understanding the situation, simplifying and structuring it, mathematizing relationships, performing mathematical procedures, interpreting the result, validating the model, and presenting alternative solutions. The tasks included problems with sufficient information, missing information, and irrelevant or additional information. Students were organized into heterogeneous groups of three or four members with different levels of mathematical performance. In each session, students first considered the problem individually and then discussed possible assumptions, representations, and solutions within their groups. Selected solutions were subsequently presented, compared, and evaluated by the class, while the teacher functioned as a facilitator rather than the sole provider of methods.

Mathematical independence was assessed with a six-item, five-point Likert scale addressing students' ability to set goals, organize time, decide how to participate, select how to work, independently check solutions, and independently correct solutions. The questionnaire underwent translation, back-translation, and review for conceptual equivalence by specialists in mathematics education. Its internal consistency was satisfactory across the instructional measurements, with Cronbach's alpha coefficients ranging from 0.842 to 0.936. Quantitative changes across sessions were examined using the Friedman test. For the qualitative phase, nine students representing low, moderate, and high levels of mathematical performance were purposively selected from the participating classes. Semi-structured interviews explored their experiences of independence, group interaction, multiple-solution problem solving, confidence, and perceived ability to solve mathematical problems. The interview data were analyzed to identify recurrent meanings and patterns that could explain the quantitative results.

Findings

The quantitative results demonstrated an overall increase in students' perceived mathematical independence over the course of the intervention. The response distributions gradually shifted from the low and moderate categories in the earlier sessions toward the high and very high categories in the later sessions. Friedman tests indicated statistically significant differences across the five measured instructional stages for five of the six independence items. For the first item, the Friedman statistic was 13.121 with four degrees of freedom, but the difference did not reach statistical significance ($p=0.069$). For the second item, the test was significant, $\chi^2=13.931$, $df=4$, $p=0.022$. Significant changes were also observed for the third item, $\chi^2=9.514$, $df=4$, $p=0.049$; the fourth item, $\chi^2=9.543$, $df=4$, $p=0.049$; the fifth item, $\chi^2=11.438$, $df=4$, $p=0.008$; and the sixth item, $\chi^2=8.689$, $df=4$, $p=0.011$. The mean ranks generally increased from the early instructional sessions to the final assessment, particularly for the items related to deciding how to participate, selecting a working method, and independently checking and correcting solutions.

The qualitative findings supported and extended the statistical results. Students reported that, during the initial sessions, they frequently waited for group leaders or stronger classmates to solve the problems and sometimes copied the proposed solutions without developing their own reasoning. As the intervention progressed, they became more willing to attempt problems independently, propose personal ideas, and examine whether their assumptions and calculations were defensible. Participants stated that the availability of multiple acceptable approaches reduced the pressure to identify one teacher-approved method and made them less afraid of giving an incorrect response. They also described increased confidence in expressing their opinions, explaining solutions to classmates, and correcting their own work. Several students indicated that positive feedback from peers strengthened their belief that they possessed mathematical creativity and problem-solving ability. Some further reported that this increased confidence extended beyond mathematics to participation in other classes, communication within the family, and their perceived capacity to manage unexpected problems in daily life.

Discussion and Conclusion

The convergence of the quantitative and qualitative findings suggests that integrating multiple-solution strategies with open-ended mathematical modeling and small-group collaboration can strengthen important dimensions of students' learning independence. The instructional tasks required students to make decisions about relevant information, generate assumptions, choose representations, compare methods, and judge the adequacy of their results. These demands transferred part of the responsibility for learning from the teacher to the students and provided repeated opportunities to practice autonomous mathematical decision-making.

The multiple-solution structure appears to have been especially important because it reduced students' dependence on a single prescribed method. When several defensible solutions were possible, students could draw on their own knowledge and were more willing to communicate incomplete or initially uncertain ideas. This environment reframed errors as resources for discussion and revision rather than evidence of inability. Consequently, students became more persistent and increasingly willing to check and correct their own solutions.

Collaborative work also supported the development of independence rather than contradicting it. Peer discussion initially provided scaffolding for students who lacked confidence, but repeated participation gradually enabled them to formulate and defend their own ideas. Positive peer responses created experiences of competence, while exposure to different strategies broadened students' understanding of what constituted a valid mathematical approach. The findings therefore indicate that carefully organized cooperation can function as a pathway toward individual autonomy when each student is expected to think, contribute, and reflect independently.

The non-significant change in one questionnaire item suggests that the components of independence may not develop uniformly during a short intervention. Skills directly practiced in every session, such as selecting a strategy or revising a solution, may improve more rapidly than broader capacities such as independently determining long-term learning goals. A longer intervention that gives students greater responsibility for selecting problems and establishing personal objectives may produce more comprehensive changes.

Overall, the study demonstrates that explicit modeling instruction and autonomy-supportive task design can be successfully combined. The structured modeling cycle prevented students from becoming disoriented by complex open-ended situations, while the freedom to generate multiple solutions preserved meaningful choice and intellectual ownership. The findings support the inclusion of more open-ended modeling problems in mathematics curricula, textbooks, and assessment systems. They also highlight the need for teacher preparation in facilitating productive group interaction, managing diverse solutions, and evaluating students' reasoning rather than only their final answers. Through such instructional practices, mathematics classrooms can become environments in which students not only improve their problem-solving competence but also develop greater confidence, independence, and responsibility for their own learning.



eISSN: 2322-1445

دوره ۱۳ شماره ۲ پاییز ۱۴۰۶ صفحات ۲۱-۱

جامعه شناسی آموزش و پرورش

تأثیر رویکرد راه حل های چندگانه در حل مسائل مدل سازی ریاضی بازپاسخ بر استقلال و خودکارآمدی دانش آموزان

معصومه غلامی^۱، نسیم اصغری^{۲*}، لیلا گلشنی^۳

۱. گروه ریاضی، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.

۲. گروه ریاضی، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران (نویسنده مسئول).

✉ ایمیل نویسنده مسئول: Nas.Asghari@iauctb.ac.ir

مقاله تحقیقاتی

چکیده

هدف: پژوهش حاضر با هدف تعیین تأثیر آموزش مبتنی بر راه حل های چندگانه در حل مسائل مدل سازی ریاضی بازپاسخ بر استقلال و خودکارآمدی دانش آموزان دختر پایه نهم انجام شد.

روش شناسی: این پژوهش با رویکرد آمیخته تبیینی انجام شد و بخش کمی آن از نوع نیمه آزمایشی با طرح تک گروهی پیش آزمون-پس آزمون و سنجش های مکرر طی جلسات و بخش کیفی آن از نوع مطالعه موردی بود. شرکت کنندگان شامل ۷۶ دانش آموز دختر پایه نهم یک مدرسه دولتی در منطقه ۳ تهران بودند که با روش نمونه گیری در دسترس انتخاب شدند. مداخله طی هفت جلسه ۴۵ دقیقه ای اجرا شد و شامل آموزش صریح مراحل مدل سازی، حل مسائل بازپاسخ دارای داده های کافی، اضافی یا مفقود و تولید و مقایسه راه حل های چندگانه در گروه های سه تا چهار نفره بود. استقلال ریاضی با پرسشنامه شش گویه ای مبتنی بر طیف پنج درجه ای لیکرت سنجیده شد که ضرایب آلفای کرونباخ آن در سنجش های مختلف بین ۰/۸۴۲ و ۰/۹۳۶ قرار داشت. همچنین، با ۹ دانش آموز دارای عملکرد ضعیف، متوسط و قوی مصاحبه نیمه ساختاریافته انجام شد. داده های کمی با آزمون فریدمن تحلیل شدند.

یافته ها: نتایج آزمون فریدمن نشان داد اثر جلسه برای پنج مورد از شش گویه استقلال ریاضی معنادار بود و میانگین رتبه پاسخ ها در طول مداخله افزایش یافت؛ مقادیر معناداری این گویه ها در دامنه ۰/۰۰۸ تا ۰/۰۴۹ قرار داشت. تنها در یک گویه، تفاوت میان جلسات از نظر آماری معنادار نبود ($P=0/069$). دامنه آماره های فریدمن برای گویه های معنادار بین ۹/۵۱۴ و ۱۳/۹۳۱ بود که بیانگر بهبود معنادار ابعاد تصمیم گیری، سازمان دهی فعالیت، بررسی مستقل و اصلاح راه حل ها در جریان مداخله بود.

نتیجه گیری: تلفیق آموزش صریح مدل سازی ریاضی، مسائل بازپاسخ، راه حل های چندگانه و یادگیری مشارکتی می تواند استقلال یادگیری و احساس خودکارآمدی دانش آموزان را تقویت کند. این رویکرد با فراهم کردن آزادی انتخاب راهبرد، فرصت بیان ایده ها و مسئولیت پذیری در ارزیابی راه حل ها، زمینه گذار از وابستگی به معلم به یادگیری فعال و خودراهبر را فراهم می سازد.

استناد مقاله:

غلامی، معصومه، اصغری، نسیم، و گلشنی، لیلا. (۱۴۰۶). تأثیر رویکرد راه حل های چندگانه در حل مسائل مدل سازی ریاضی بازپاسخ بر استقلال و خودکارآمدی دانش آموزان. جامعه شناسی آموزش و پرورش، ۱۳(۲): ۲۱-۱.



<https://doi.org/10.61838/kman.soc.802>



Commons: CC BY 4.0

مقدمه

آموزش ریاضیات در دهه‌های اخیر از انتقال مستقیم قواعد، فرمول‌ها و الگوریتم‌های از پیش تعیین‌شده به سمت پرورش توانایی اندیشیدن، استدلال کردن، تصمیم‌گیری و استفاده از دانش ریاضی در موقعیت‌های واقعی حرکت کرده است. در این رویکرد، موفقیت دانش‌آموز تنها بر اساس سرعت دستیابی به یک پاسخ صحیح سنجیده نمی‌شود، بلکه چگونگی فهم موقعیت، انتخاب داده‌های مرتبط، ساختن روابط ریاضی، بررسی اعتبار نتیجه و توانایی توضیح مسیر حل نیز اهمیت می‌یابد. یادگیری تفکر ریاضی مستلزم آن است که دانش‌آموزان بتوانند منابع شناختی و فراشناختی خود را در مواجهه با موقعیت‌های ناآشنا مدیریت کنند، راهبردهای گوناگون را بیازمایند و درباره معقول بودن پاسخ‌های خود قضاوت کنند (Schoenfeld, 2016). از همین منظر، سواد ریاضی نیز صرفاً به تسلط بر محاسبات محدود نیست، بلکه توانایی به‌کارگیری مفاهیم ریاضی برای تفسیر، تحلیل و حل مسائل فردی و اجتماعی را در بر می‌گیرد (Stacey, 2015). بنابراین، یکی از مسئولیت‌های اساسی آموزش ریاضی معاصر ایجاد محیط‌هایی است که دانش‌آموزان را از دریافت‌کنندگان منفعل دانش به عاملانی فعال، مستقل و مسئول در فرایند یادگیری تبدیل کند.

حل مسئله هسته مرکزی چنین تحولی است؛ زیرا دانش‌آموز در فرایند حل مسئله ناچار می‌شود میان دانش پیشین، شرایط مسئله و هدف مورد انتظار پیوند برقرار کند. پژوهش‌های جدید نیز نشان می‌دهند که توانایی حل مسئله ریاضی تحت تأثیر مجموعه‌ای از عوامل شناختی، انگیزشی و شخصیتی قرار دارد. برای نمونه، کنجکاوی عقلانی می‌تواند از طریق تقویت مشارکت شناختی و انگیزه اکتشافی، توانایی حل مسئله ریاضی نوجوانان را ارتقا دهد (Wang et al., 2026). همچنین، تفکر خلاق و انتقادی از طریق میانجی‌گری حل مسئله با پیشرفت ریاضی دانش‌آموزان ارتباط پیدا می‌کند و نشان می‌دهد که عملکرد ریاضی حاصل بازتولید رویه‌های آموخته‌شده نیست، بلکه به توانایی تولید، ارزیابی و اصلاح ایده‌ها وابسته است (Yousefpour et al., 2024). نتایج مطالعات مرتبط با مسائل بحث‌برانگیز ریاضی نیز نشان داده‌اند که مواجهه دانش‌آموزان با موقعیت‌هایی که نیازمند تحلیل داده‌ها، بررسی دیدگاه‌های جایگزین و داوری مستدل هستند، می‌تواند ظرفیت تفکر انتقادی آنان را آشکار و تقویت کند (Suryawan et al., 2024). در نتیجه، هرچه ساختار مسئله فرصت بیشتری برای اکتشاف، تصمیم‌گیری و ارائه استدلال فراهم کند، احتمال درگیری عمیق‌تر دانش‌آموز با فرایند یادگیری افزایش می‌یابد.

ضرورت توجه به حل مسئله از سال‌های نخست تحصیل آغاز می‌شود. آموزش مبتنی بر مسئله حتی در دوره پیش‌دبستانی می‌تواند مفاهیم بنیادی مانند شمارش، ترتیب و روابط کمی را از طریق فعالیت‌های معنادار و اکتشافی توسعه دهد (Torres-Pena et al., 2025). استمرار این رویکرد در دوره‌های بالاتر سبب می‌شود دانش‌آموز به‌تدریج یاد بگیرد که ریاضیات نه مجموعه‌ای منفصل از نمادها، بلکه ابزاری برای سازمان‌دهی تجربه و فهم جهان است. بر همین اساس، طراحی منابع آموزشی مسئله‌محور و متناسب با موقعیت‌های اجتماعی و جهانی نیز به یکی از نیازهای مهم برنامه‌های درسی تبدیل شده است؛ چنان‌که نیازسنجی برای تولید پودمان‌های الکترونیکی مبتنی بر یادگیری مسئله‌محور، بر ضرورت پیوند آموزش ریاضی با مسائل واقعی و شایستگی‌های شهروندی تأکید دارد (Subramaniam & Rajoo, 2025). افزون بر حل مسئله، مسئله‌سازی نیز نقش مهمی در یادگیری عمیق دارد؛ زیرا زمانی که دانش‌آموز خود به تولید یا بازسازی مسئله می‌پردازد، ساختارهای ریاضی را دقیق‌تر تحلیل می‌کند و رابطه میان شرایط، داده‌ها، محدودیت‌ها و پاسخ‌ها را بهتر درمی‌یابد (Geteregechi, 2025). این شواهد نشان می‌دهند که آموزش ریاضی باید فراتر از تمرین مسائل بسته و آشنا حرکت کند و فرصت‌هایی برای تولید پرسش، تغییر فرض‌ها و آزمون راه‌حل‌های بدیل فراهم آورد.

مدل‌سازی ریاضی یکی از مناسب‌ترین بسترها برای تحقق این هدف است. مدل‌سازی فرایندی پویا و تکرارشونده است که طی آن یک موقعیت واقعی ابتدا درک و ساده‌سازی می‌شود، سپس عناصر آن به زبان ریاضی ترجمه شده، روابط و فرضیه‌های لازم ساخته می‌شوند و پس از انجام عملیات ریاضی، نتایج دوباره در بافت واقعی تفسیر و اعتبارسنجی می‌گردند. رویکرد مدل‌ها و مدل‌سازی، دانش ریاضی را محصول فعالیت سازنده یادگیرنده می‌داند و بر این اصل تأکید می‌کند که دانش‌آموز باید بتواند برای موقعیت‌های پیچیده، نظامی از روابط و بازنمایی‌ها ایجاد کند (Lesh & Doerr, 2003). شایستگی مدل‌سازی نیز شامل مجموعه‌ای از توانایی‌ها، از جمله شناسایی متغیرها، تعیین فرض‌ها، ریاضی‌سازی، انتخاب روش، تفسیر نتیجه و ارزیابی اعتبار مدل است (Lesh et al., 2013). از دیدگاه آموزش ریاضی، مدل‌سازی و کاربردها موجب می‌شوند مرز میان ریاضی مدرسه‌ای و مسائل زندگی واقعی کاهش یابد و دانش‌آموزان کاربرد مفاهیم ریاضی را در تصمیم‌گیری‌های واقعی تجربه کنند (Niss et al., 2007). بنابراین، مسائل مدل‌سازی نه تنها ابزار سنجش دانش ریاضی، بلکه محیطی برای رشد استدلال، خلاقیت، خودنظارتی و مسئولیت‌پذیری محسوب می‌شوند.

در میان انواع فعالیت‌های مدل‌سازی، مسائل بازپاسخ از ظرفیت آموزشی ویژه‌ای برخوردارند. این مسائل برخلاف تمرین‌های معمول، الزاماً یک مسیر استاندارد، مجموعه داده کاملاً مشخص یا پاسخ نهایی یگانه ندارند. در برخی از آنها اطلاعاتی اضافی وجود دارد که دانش‌آموز باید نامرتب‌بودن آنها را تشخیص دهد؛ برخی دیگر دارای داده‌های مفقود هستند و حل‌کننده ناگزیر است با طرح فرض‌های منطقی یا برآورد مقادیر مناسب، مدل خود را تکمیل کند؛ در گروهی دیگر نیز داده‌ها کافی‌اند، اما چندین راهبرد و بازنمایی متفاوت برای دستیابی به نتیجه وجود دارد. چنین ساختاری دانش‌آموز را وادار می‌کند که به‌جای جست‌وجوی یک فرمول آماده، درباره معنای مسئله، کفایت داده‌ها و پیامد انتخاب‌های خود بیندیشد. یافته‌های مربوط به آموزش ریاضی واقع‌گرایانه نشان می‌دهند که قرار دادن دانش‌آموزان در موقعیت‌های نزدیک به واقعیت و هدایت آنان برای ساختن راه‌حل، می‌تواند مهارت حل مسئله را در مقایسه با آموزش متعارف بهبود بخشد (Ventistas et al., 2024). در این محیط، خطا نیز صرفاً نشانه شکست تلقی نمی‌شود، بلکه فرصتی برای بازبینی مفروضات، مقایسه روش‌ها و اصلاح مدل است.

یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های مسائل بازپاسخ، امکان تولید راه‌حل‌های چندگانه است. رویکرد راه‌حل‌های چندگانه بر این باور استوار است که یک مسئله ریاضی را می‌توان از مسیرهای مختلف، با استفاده از بازنمایی‌های عددی، جبری، هندسی، نموداری، جدولی یا کلامی حل کرد. تکالیف چندراه‌حلی دانش‌آموزان را به تولید، مقایسه و ارزیابی روش‌ها ترغیب می‌کنند و از این طریق انعطاف‌پذیری شناختی و درک ساختاری آنان را گسترش می‌دهند (Leikin & Zaslavsky, 2013). هنگامی که دانش‌آموز دو یا چند روش را در کنار یکدیگر قرار می‌دهد، می‌تواند شباهت‌ها و تفاوت‌های مفهومی آنها را تشخیص دهد، کارآمدی هر راهبرد را بررسی کند و دریابد که چرا یک روش در شرایطی خاص مناسب‌تر است. کیفیت آموزش ریاضی نیز زمانی افزایش می‌یابد که معلم به‌جای محدودکردن یادگیری به اجرای رویه‌ها، فرصت مبارزه شناختی سازنده، توضیح استدلال و برقراری ارتباط میان ایده‌ها را فراهم کند (Hiebert & Grouws, 2007). بدین ترتیب، راه‌حل‌های چندگانه می‌توانند یادگیری را از سطح پیروی الگوریتمی به سطح فهم مفهومی و استدلال مستقل ارتقا دهند.

با وجود این ظرفیت‌ها، اجرای مؤثر فعالیت‌های چندراه‌حلی به نحوه سازمان‌دهی گفت‌وگوی ریاضی در کلاس وابسته است. ارائه چند پاسخ بدون تحلیل و مقایسه آنها لزوماً به یادگیری عمیق منجر نمی‌شود. معلم باید راه‌حل‌های تولیدشده را هدفمند انتخاب و توالی ارائه آنها را تنظیم کند، دانش‌آموزان را به توضیح دلایل خود وادارد و ارتباط میان بازنمایی‌ها و روش‌ها را برجسته سازد (Stein & Smith, 2011). در چنین شرایطی، کلاس ریاضی به جامعه‌ای برای ساخت مشترک معنا تبدیل می‌شود و دانش‌آموزان می‌آموزند که یک ادعا را با شواهد و استدلال پشتیبانی کنند. یادگیری مشارکتی نیز زمانی معنادار است که اعضای گروه صرفاً کار را تقسیم نکنند، بلکه ایده‌های یکدیگر را بشنوند، درباره تفاوت دیدگاه‌ها گفت‌وگو کنند و برای رسیدن به فهم مشترک مسئولیت بپذیرند (Sharan, 2015). بنابراین، ترکیب مسائل مدل‌سازی بازپاسخ، راه‌حل‌های چندگانه و گروه‌های کوچک مشارکتی می‌تواند محیطی ایجاد کند که در آن رشد شناختی و اجتماعی به‌طور هم‌زمان رخ دهد.

بحث درباره کیفیت مسائل ارائه‌شده در کتاب‌های درسی نیز در این زمینه اهمیت دارد. انطباق محتوای مسائل کتاب‌های ریاضی با چارچوب‌های معتبر بین‌المللی می‌تواند نشان دهد که تا چه اندازه فرصت‌های لازم برای استدلال، کاربرد و حل مسئله در اختیار دانش‌آموزان قرار می‌گیرد. بررسی تطبیقی مسائل منتشرشده تیمز ۲۰۱۹ با محتوای کتاب‌های ریاضی پایه چهارم ایران و ژاپن، ضرورت توجه به تناسب محتوایی و شناختی مسائل را برجسته کرده است (Yaftian & Abbasi, 2024b). تحلیل دیگری از هم‌سویی مسائل تیمز با محتوای کتاب‌های درسی ایران و ژاپن نیز نشان می‌دهد که صرف پوشش موضوعات ریاضی کافی نیست و باید سطح تقاضای شناختی و نوع فعالیت مورد انتظار از دانش‌آموزان نیز در طراحی مسائل مورد توجه قرار گیرد (Yaftian & Abbasi, 2024a). بر این مبنا، افزایش تعداد مسائل مدل‌سازی و بازپاسخ در برنامه درسی، زمانی اثربخش خواهد بود که معلمان نیز برای مدیریت پاسخ‌های متنوع، پذیرش ایده‌های غیرمتعارف و هدایت گفت‌وگوهای تحلیلی آمادگی داشته باشند.

پیامد مهم این تغییر آموزشی، تقویت استقلال یادگیری است. استقلال به معنای رهاکردن دانش‌آموز بدون حمایت نیست، بلکه به توانایی او برای تعیین هدف، برنامه‌ریزی، انتخاب راهبرد، نظارت بر پیشرفت و ارزیابی عملکرد خویش اشاره دارد. نظریه یادگیری خودتنظیم توضیح می‌دهد که یادگیرندگان مستقل، اهداف خود را آگاهانه تعیین می‌کنند، راهبردهای متناسب با تکلیف را به کار می‌گیرند و بر اساس بازخورد، عملکرد خود را اصلاح می‌کنند.

(Zimmerman, 2002). چارچوب‌های انگیزشی و خودتنظیمی نیز بر تعامل میان شناخت، انگیزش، رفتار و شرایط زمینه‌ای تأکید دارند و نشان می‌دهند که کنترل فعال فرایند یادگیری در موفقیت تحصیلی نقش اساسی دارد (Pintrich, 2004). کاربردهای کلاسی یادگیری خودتنظیم بیانگر آن است که استقلال باید در متن فعالیت‌های واقعی یادگیری پرورش یابد، نه آنکه صرفاً به صورت یک مهارت جداگانه آموزش داده شود (Paris & Paris, 2001). مسائل بازپاسخ دقیقاً چنین فرصتی را فراهم می‌کنند، زیرا دانش‌آموز باید دوباره چگونگی شروع، انتخاب داده‌ها، آزمون راهبرد و اصلاح پاسخ تصمیم بگیرد.

در رویکردهای دانش‌آموزمحور، حق انتخاب و فرصت ابراز نظر از مؤلفه‌های اساسی رشد استقلال هستند. از دیدگاه نظریه خودتعیین‌گری، حمایت از خودمختاری زمانی رخ می‌دهد که معلم به دیدگاه دانش‌آموز توجه کند، برای فعالیت‌ها دلیل معنادار ارائه دهد و امکان انتخاب و ابتکار را فراهم سازد. چنین محیطی مشارکت رفتاری، عاطفی و شناختی دانش‌آموز را افزایش می‌دهد (Reeve, 2012). در مقابل، آموزش کنترل‌گر و تک‌پاسخی می‌تواند وابستگی دانش‌آموز به تأیید معلم را تقویت کند و او را از پذیرش خطر شناختی، بیان ایده‌های متفاوت و اصلاح مستقل راهحل بازدارد. مطالعات خودتنظیمی و سازمان‌دهی یادگیری نیز بر این نکته تأکید دارند که نقش فعال فراگیر در تصمیم‌گیری، زمینه افزایش مسئولیت‌پذیری و تعهد به تکلیف را فراهم می‌کند. در سطح گسترده‌تر، بررسی تعارض‌های غالب در مؤسسات آموزشی نشان می‌دهد که فرایندهای تصمیم‌گیری و تعاملات سازمانی می‌توانند بر نحوه اجرای فعالیت‌های آموزشی اثرگذار باشند (Taghizadeh & Shokri, 2013). همچنین، ادبیات رهبری و تعهد سازمانی یادآور می‌شود که اجرای پایدار نوآوری‌ها تنها به طراحی فعالیت محدود نیست و به فضای حمایتی، اعتماد و همراهی اعضای سازمان نیز وابسته است (Taghizadeh & Shokri, 2014)؛ هرچند این مباحث مستقیماً به آموزش ریاضی نمی‌پردازند، از منظر فراهم‌سازی زمینه مدرسه‌ای مناسب برای تدریس مشارکتی و دانش‌آموزمحور قابل توجه‌اند.

خودکارآمدی نیز در کنار استقلال، یکی از سازه‌های تعیین‌کننده در مواجهه دانش‌آموزان با مسائل دشوار ریاضی است. دانش‌آموزی که خود را قادر به فهم و حل مسئله می‌داند، تلاش بیشتری انجام می‌دهد، در برابر شکست اولیه پایداری نشان می‌دهد و راهبردهای متنوع‌تری را امتحان می‌کند. در مقابل، خودکارآمدی پایین می‌تواند به اجتناب از مسئله، وابستگی به هم‌کلاسی یا معلم و رهاکردن زود هنگام تکلیف منجر شود. راهحل‌های چندگانه از چند مسیر می‌توانند خودکارآمدی را افزایش دهند. نخست، وجود بیش از یک مسیر معتبر، احتمال تجربه موفقیت را برای دانش‌آموزان با سبک‌ها و سطوح توانایی متفاوت افزایش می‌دهد. دوم، مشاهده روش‌های همسالان نشان می‌دهد که حل مسئله تنها وابسته به یک استعداد ثابت یا روش خاص نیست. سوم، ارائه و دفاع از یک راهحل شخصی می‌تواند احساس مالکیت، شایستگی و عاملیت را تقویت کند (Ozturk et al., 2026; Soleimani Far, 2025; Zhou et al., 2025). در چنین فضایی، دانش‌آموز به تدریج درمی‌یابد که می‌تواند بر پایه استدلال خود تصمیم بگیرد و حتی در صورت خطا، از طریق بازنگری و تعامل با دیگران راهحلش را اصلاح کند.

با وجود تأکید نظری گسترده بر حل مسئله، مدل‌سازی، یادگیری مشارکتی و خودتنظیمی، شواهد مربوط به تأثیر ترکیبی این مؤلفه‌ها بر استقلال و خودکارآمدی دانش‌آموزان در بافت آموزش ریاضی ایران همچنان محدود است. بخش قابل توجهی از آموزش مدرسه‌ای هنوز بر مسائل بسته، داده‌های کاملاً مشخص و پاسخ‌های یگانه متمرکز است و ارزشیابی نیز بیشتر محصول نهایی را نسبت به فرایند استدلال مورد توجه قرار می‌دهد. در چنین شرایطی، دانش‌آموزان ممکن است به جست‌وجوی روش مورد نظر معلم عادت کنند و فرصت کافی برای تجربه انتخاب، فرضیه‌سازی، دفاع از ایده و اصلاح مستقل راهحل نداشته باشند. همچنین، بسیاری از پژوهش‌ها مدل‌سازی، راهحل‌های چندگانه یا یادگیری گروهی را به صورت جداگانه بررسی کرده‌اند؛ حال آنکه تلفیق این مؤلفه‌ها می‌تواند سازوکاری متفاوت ایجاد کند که در آن تجربه موفقیت، تعامل اجتماعی، آزادی شناختی و مسئولیت فردی یکدیگر را تقویت کنند. بررسی هم‌زمان داده‌های کمی و تجربه‌های بیان‌شده دانش‌آموزان نیز می‌تواند روشن سازد که تغییرات احتمالی استقلال و خودکارآمدی تنها در نمرات سنجش منعکس می‌شود یا در شیوه مشارکت، جرئت بیان نظر، پایداری در حل مسئله و توانایی بررسی و اصلاح مستقل پاسخ‌ها نیز قابل مشاهده است.

هدف پژوهش حاضر بررسی تأثیر رویکرد راهحل‌های چندگانه در حل مسائل مدل‌سازی ریاضی بازپاسخ در قالب گروه‌های کوچک مشارکتی بر استقلال و خودکارآمدی دانش‌آموزان دختر پایه نهم بود.

پژوهش حاضر با هدف بررسی تأثیر رویکرد راه‌حل‌های چندگانه در حل مسائل مدل‌سازی ریاضی بازپاسخ بر استقلال و مهارت‌های حل مسئله دانش‌آموزان، با روش ترکیبی تبیینی انجام شد. بخش کمی پژوهش به‌صورت نیمه‌آزمایشی با طرح پیش‌آزمون - پس‌آزمون و بخش کیفی به شیوه مطالعه موردی اجرا گردید. داده‌ها از طریق مشاهده، پرسشنامه و مصاحبه نیمه‌ساختاریافته گردآوری شد و داده‌های کیفی به‌منظور تبیین و تکمیل یافته‌های کمی مورد استفاده قرار گرفت.

شرکت‌کنندگان پژوهش شامل ۷۶ دانش‌آموز دختر پایه نهم منطقه ۳ شهر تهران بودند که به شیوه نمونه‌گیری در دسترس انتخاب شدند. مداخله آموزشی توسط پژوهشگر و طی هفت جلسه ۴۵ دقیقه‌ای، خارج از ساعات رسمی درسی، اجرا شد. محتوای آموزشی شامل حل مسائل مدل‌سازی ریاضی بازپاسخ و به‌کارگیری راه‌حل‌های چندگانه در مسائل مرتبط با قضیه فیثاغورث بود. داده‌های پژوهش در نیمه دوم سال تحصیلی ۲۰۲۳-۲۰۲۴ گردآوری شد.

به‌منظور بررسی تغییرات عملکرد دانش‌آموزان، از طرح پیش‌آزمون - پس‌آزمون در سه کلاس آزمایش استفاده شد. همچنین برای کنترل همگنی گروه‌ها، میانگین نمرات ریاضی دانش‌آموزان در پایه هشتم بررسی شد که در بازه ۱۹ تا ۲۰ قرار داشت. هدف اصلی پژوهش، بررسی میزان اثربخشی آموزش مبتنی بر مدل‌سازی ریاضی و راه‌حل‌های چندگانه در مقایسه با آموزش سنتی کتاب‌محور در توسعه استقلال و توانایی حل مسائل مدل‌سازی بود.

مداخله آموزشی مبتنی بر به‌کارگیری رویکرد راه‌حل‌های چندگانه در حل مسائل مدل‌سازی ریاضی بازپاسخ، صرفاً در گروه آزمایش اجرا شد. شرکت‌کنندگان پیش‌تر با مفهوم کلی راه‌حل‌های چندگانه و نمونه‌هایی از مسائل مدل‌سازی مطرح‌شده در کتاب‌های درسی آشنایی داشتند؛ با این حال آموزش نظام‌مند نحوه مواجهه با مسائل مدل‌سازی، به‌ویژه مسائل بازپاسخ، در برنامه درسی رسمی آنان پیش‌بینی نشده بود. بر این اساس، مداخله آموزشی طی هفت جلسه آموزشی طراحی و اجرا شد که محور اصلی آن آموزش مراحل حل مسائل مدل‌سازی و استفاده هم‌زمان از راه‌حل‌های چندگانه در محیط‌های یادگیری تعاملی و مبتنی بر کار گروهی بود.

در این مداخله از مسائل مدل‌سازی بازپاسخ استفاده شد تا امکان تولید و مقایسه راه‌حل‌های متنوع فراهم گردد. مسائل ارائه‌شده در سه دسته طراحی شدند: مسائل دارای داده‌های اضافه، مسائل دارای داده‌های ناقص و مسائل دارای داده‌های کافی. هدف از این طراحی، تقویت توانایی دانش‌آموزان در تشخیص نوع مسئله، تحلیل داده‌ها و اتخاذ راهبرد مناسب برای حل مسائل مدل‌سازی بود.

دانش‌آموزان در گروه‌های کوچک سه تا چهار نفره متشکل از سطوح عملکردی متفاوت (قوی، متوسط و ضعیف) به حل مسائل می‌پرداختند. در هر جلسه، ابتدا مسئله توسط معلم معرفی می‌شد و دانش‌آموزان به‌صورت فردی به تحلیل اولیه آن می‌پرداختند؛ سپس در گروه‌های خود به بحث، تبادل نظر و ارائه راه‌حل‌های مختلف می‌پرداختند. در ادامه برخی از دانش‌آموزان راه‌حل‌های گروه خود را ارائه کرده و سایر دانش‌آموزان در مورد آن به بحث و ارزیابی می‌پرداختند. در این فرایند، معلم نقش هدایت‌گر و تسهیل‌کننده تعاملات یادگیری را بر عهده داشت.

طراحی آموزشی این مداخله بر اساس چرخه مدل‌سازی بلوم و لایس (۲۰۰۷) انجام شد که شامل مراحل درک مسئله، ساده‌سازی و ساختاردهی، ریاضی‌سازی، حل ریاضی، تفسیر و اعتبارسنجی نتایج، ارائه راه‌حل‌های متنوع و تبیین فرایند حل بود. طی جلسات آموزشی، دانش‌آموزان با نحوه شناسایی انواع مسائل بازپاسخ و راهبردهای مناسب برای مواجهه با هر یک از آن‌ها آشنا شدند؛ از جمله حذف داده‌های غیرضروری، برآورد یا تولید داده‌های مورد نیاز و تحلیل مسائل دارای داده‌های کافی.

در جلسه نخست پیش‌آزمون اجرا شد و از جلسه دوم تا ششم آموزش و حل مسائل مدل‌سازی در قالب فعالیت‌های فردی و گروهی ادامه یافت. در این جلسات از مسائل مدل‌سازی متنوعی مانند مسائل «شامپو»، «کفش غول»، «درخت»، «تلویزیون» و «حصار» استفاده شد. در پایان هر جلسه نیز دانش‌آموزان پرسشنامه استقلال ریاضی را تکمیل کردند. در جلسه هفتم پس‌آزمون اجرا شد تا تغییرات عملکرد دانش‌آموزان پس از مداخله آموزشی بررسی گردد.

برای بخش کیفی پژوهش، ۹ دانش‌آموز از میان سه کلاس آزمایش با سطوح عملکرد متفاوت به‌صورت هدفمند انتخاب شدند و در مصاحبه‌های نیمه‌ساختاریافته شرکت کردند. هدف از این بخش، بررسی عمیق تجربه‌های یادگیری دانش‌آموزان در زمینه استقلال فکری، تعامل گروهی و احساس

خودکارآمدی در حل مسائل مدل‌سازی بود. یافته‌های کیفی در کنار داده‌های کمی به‌منظور تبیین جامع‌تر نتایج پژوهش مورد تحلیل قرار گرفت. خلاصه از جلسات در جدول زیر گزارش می‌شود:

جدول ۱- خلاصه از جلسات

جلسات	توضیحات کارهای انجام شده
اول	اجرای پیش‌آزمون بدون معرفی کار تحقیقی - تکمیل پرسشنامه‌های مرتبط با علاقه
دوم	معرفی کار تحقیقی و اهداف آن - نقش دانش‌آموزان و تشویق جهت همکاری - آموزش هفت توالی مدل‌سازی بلوم - معرفی مسائل باز پاسخ در مدل‌سازی و نحوه برخورد با آنها
سوم	مسائل "شامپو" (بر اساس مساله اسپیکر در اسکایجلو و همکاران، ۲۰۲۳، ص ۴۲۴) و "کفش غول" (بلوم، ۲۰۱۱)، تکمیل پرسشنامه‌های مرتبط با علاقه
چهارم	"مسئله درخت" (اسکایجلو و همکاران، ۲۰۲۳، ص ۴۱۹) - تکمیل پرسشنامه‌های مرتبط با علاقه
پنجم	"مسئله تلویزیون" (اسکایجلو و همکاران، ۲۰۲۳، ص ۴۲۴) - تکمیل پرسشنامه‌های مرتبط با علاقه
ششم	"مسئله حصار" (اسکایجلو و همکاران، ۲۰۲۳، ص ۴۲۴) - تکمیل پرسشنامه‌های مرتبط با علاقه
هفتم	اجرای پس‌آزمون جهت استخراج نتایج و تکمیل پرسشنامه‌های مرتبط با علاقه و مصاحبه‌های نیمه ساختار یافته

در این پژوهش برای سنجش استقلال ریاضی دانش‌آموزان از پرسشنامه استقلال مبتنی بر مقیاس لیکرت استفاده شد. این ابزار که توسط فرنزل و همکاران (۲۰۱۲) توسعه یافته است، به بررسی نگرش‌ها، باورها و ادراک دانش‌آموزان نسبت به توانایی‌های فردی خود در فرایند یادگیری ریاضی و حل مسائل مدل‌سازی می‌پردازد.

فرآیند بومی‌سازی پرسشنامه شامل ترجمه، بازترجمه و بررسی تطابق مفهومی گویه‌ها بود که روایی محتوایی آن توسط چند تن از اساتید حوزه آموزش ریاضی تأیید شد. برای بررسی پایایی ابزار نیز از ضریب آلفای کرونباخ استفاده شد که نتایج آن در جدول مربوطه ارائه شده است.

پرسشنامه استقلال شامل شش گویه است و پاسخ‌ها بر اساس طیف پنج‌درجه‌ای لیکرت از «بسیار مخالفم» تا «بسیار موافقم» تنظیم شده‌اند. گویه‌های این مقیاس ابعادی از استقلال یادگیرنده در فعالیت‌های ریاضی را مورد سنجش قرار می‌دهند؛ از جمله توانایی تعیین اهداف یادگیری، سازماندهی زمان، انتخاب شیوه مشارکت در فعالیت‌های درسی، تصمیم‌گیری درباره نحوه انجام کار، و نیز ارزیابی و اصلاح مستقل راه‌حل‌های ارائه‌شده توسط دانش‌آموز.

الف- پرسشنامه استقلال ریاضی و بررسی پایایی آن: یکی از اهداف این تحقیق بررسی استقلال دانش‌آموز، نظرات و باورهای دانش‌آموزان درباره‌ی مسائل مدل‌سازی ریاضی و درباره خودشان و توانمندی‌های فردیشان است. استقلال دانش‌آموزان نسبت به ریاضی بر اساس پرسشنامه لیکرت (فرنزل و همکاران ۲۰۱۲)، مورد سنجش قرار گرفت. بعد از ترجمه‌ی پرسشنامه لیکرت، مفهوم سؤالات مورد بررسی قرار گرفت و عدم تغییر مفهوم آنها در فرآیند برگرداندن جملات به فارسی، توسط چند تن از اساتید تأیید شد. در پژوهش حاضر پایایی سازه‌ای مقیاس استقلال از طریق محاسبه ضریب آلفای کرونباخ احراز شد (بینید جدول ۲) این پرسشنامه در تحقیقات مختلفی مورد استفاده قرار گرفته است. این مقیاس مشتمل بر شش گویه است و پاسخ به گویه‌های آن بر اساس مقیاس پنج بخشی لیکرت از "بسیار مخالفم" تا "بسیار موافقم" صورت می‌گیرد. سؤالات پرسشنامه عبارت است از

امروز، توانستم ...

- اهداف خودم را تعیین کنم.
- زمان خود را سازماندهی کنم.
- تصمیم بگیرم چگونه در درس شرکت کنم.
- تصمیم بگیرم چگونه می‌خواهم کار کنم.

- راه حل هایم را خودم بررسی کنم.
- راه حل هایم را خودم تصحیح کنم.

هرقدر شاخص آلفای کرونباخ به ۱ نزدیکتر باشد، همبستگی درونی بین سؤالات بیشتر و در نتیجه پرسشها همگن تر خواهند بود. کرونباخ ضریب پایایی ۴۵٪ را کم، ۷۵٪ را متوسط و قابل قبول، و ضریب ۹۵٪ را زیاد پیشنهاد کرده. در بسیاری از منابع نیز مقادیر به دست آمده بالای ۰/۷ در این آزمون مطلوب تلقی می‌شود. بدیهی است در صورت پایین بودن مقدار آلفا، بایستی بررسی شود که با حذف کدام پرسشهای پرسشنامه مقدار آن را می‌توان افزایش داد. نتایج بررسی پایایی پرسشنامه بر اساس تعداد پرسشنامه به شرح زیر است:

جدول ۲- بررسی پایایی متغیرهای استقلال در جلسات مختلف براساس آلفای کرونباخ

متغیر	جلسات	تعداد پاسخگوها	تعداد گویه	آلفای کرونباخ
استقلال	جلسه سوم	۷۳	۶	۰.۸۶۰
	جلسه چهارم	۸۰	۶	۰.۸۴۲
	جلسه پنجم	۷۸	۶	۰.۸۶۸
	جلسه ششم	۷۸	۶	۰.۹۰۴
	پس آزمون	۷۹	۶	۰.۹۳۶

با توجه به مقادیر آلفای کرونباخ به دست آمده برای کل پرسشنامه که بیشتر از ۰.۷ است، پایایی پرسشنامه تایید می‌شود.

ب- مصاحبه‌ی نیمه ساختاریافته: همچنین برای بررسی نظرات دانش‌آموزان و کسب اطلاعات بیشتر درباره‌ی میزان علاقه آن‌ها نسبت به سؤالات مدل‌سازی که در جلسات آموزشی ارائه شده بود، از یک مصاحبه نیمه ساختار یافته با سؤالات باز پاسخ استفاده شد. دانش‌آموزان شرکت‌کننده در مصاحبه، سه سطح عملکردی متفاوت داشتند. این نفرات شامل سه دانش‌آموز با عملکرد ضعیف، سه دانش‌آموز با عملکرد متوسط و سه دانش‌آموز با عملکرد قوی در ریاضی بودند که از گروه آزمایش انتخاب شدند. بنابراین مصاحبه نیمه ساختار یافته، با سؤالات باز پاسخ زیر در پس آزمون انجام شد، که سؤالات مرتبط با علاقه به شرح زیر است:

سؤالات مصاحبه‌ی نیمه ساختاریافته:

- نظر شما درباره‌ی مسائل مدل‌سازی با راه حل‌های چندگانه چیست؟

- آیا مسائل مدل‌سازی در استقلال شما در درس ریاضی موثر است؟

یافته‌های پژوهش

در این پژوهش به بررسی چگونگی کار دانش‌آموزان در گروه‌های کوچک همکاری و ارائه راه‌حل‌های چندگانه، در هنگام کار بر روی مسائل مدل‌سازی شده ریاضی و تاثیر آن بر استقلال آنان پرداخته شد که در ادامه نتایج کمی و کیفی این مطالعه بیان می‌شود.

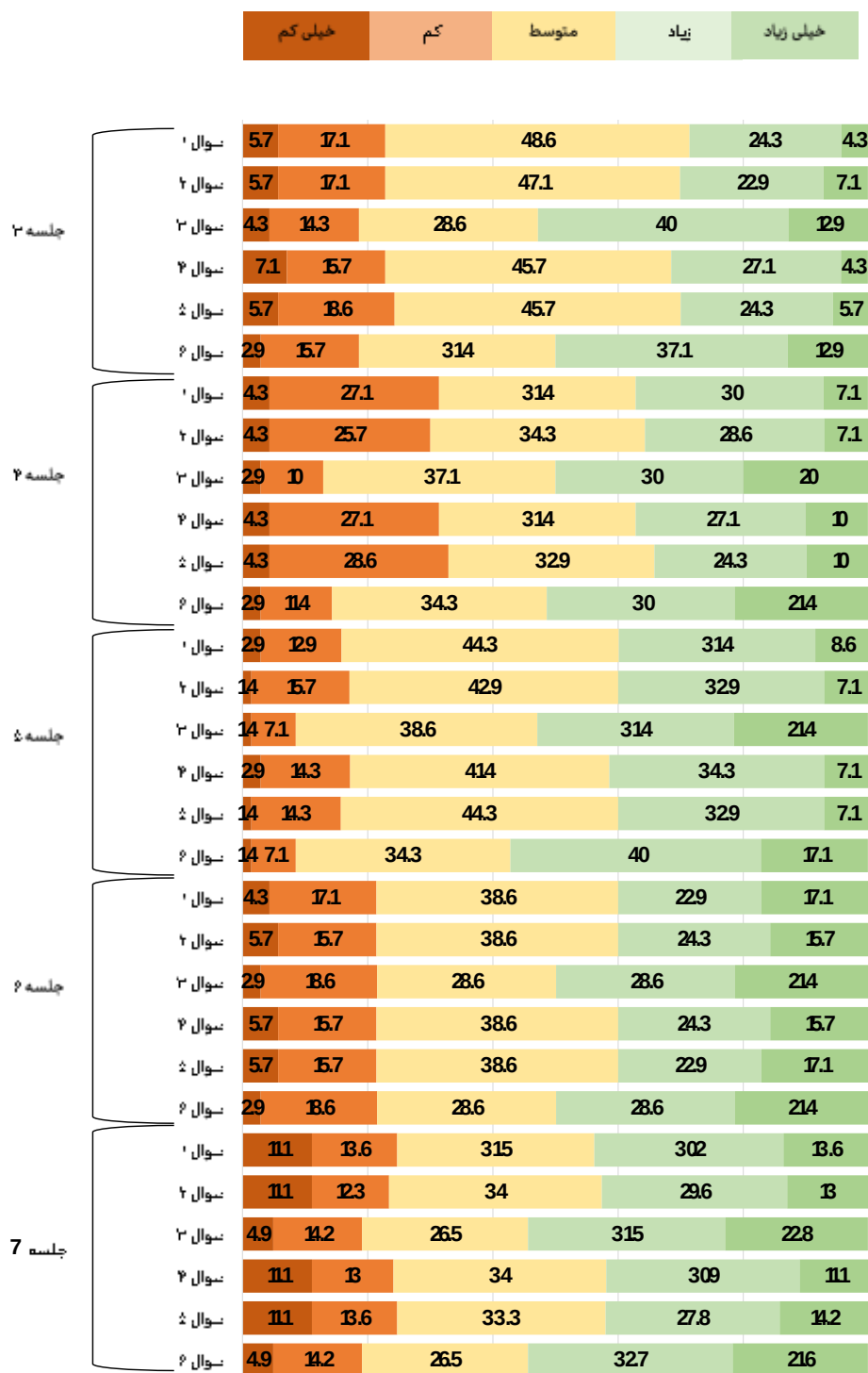
بررسی میزان استقلال طی جلسات: میزان استقلال طی جلسات در گروه آزمایش و در جلسه هفتم برای گروه مورد آزمایش سنجیده شد، در ادامه در جدول زیر، توزیع نمرات استقلال در طی جلسات مختلف ارائه شده است.

جدول ۳- توزیع پاسخ به سؤالات میزان استقلال در جلسات مختلف

جلسه	سوال	خیلی کم	کم	متوسط	زیاد	خیلی زیاد
		درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد
۳	۱	۴	۵/۷	۱۲	۱۷/۱	۳۴
	۲	۴	۵/۷	۱۲	۱۷/۱	۳۳
	۳	۳	۴/۳	۱۰	۱۴/۳	۲۰
	۴	۵	۷/۱	۱۱	۱۵/۷	۳۲
	۵	۴	۵/۷	۱۳	۱۸/۶	۳۲
	۶	۲	۲/۹	۱۱	۱۵/۷	۲۲
۴	۱	۳	۴/۳	۱۹	۲۷/۱	۲۲
	۲	۳	۴/۳	۱۸	۲۵/۷	۲۴
	۳	۲	۲/۹	۷	۱۰/۰	۲۶
	۴	۳	۴/۳	۱۹	۲۷/۱	۲۲
	۵	۳	۴/۳	۲۰	۲۸/۶	۲۳
	۶	۲	۲/۹	۸	۱۱/۴	۲۴
۵	۱	۲	۲/۹	۹	۱۲/۹	۳۱
	۲	۱	۱/۴	۱۱	۱۵/۷	۳۰
	۳	۱	۱/۴	۵	۷/۱	۲۷
	۴	۲	۲/۹	۱۰	۱۴/۳	۲۹
	۵	۱	۱/۴	۱۰	۱۴/۳	۳۱
	۶	۱	۱/۴	۵	۷/۱	۲۴
۶	۱	۳	۴/۳	۱۲	۱۷/۱	۲۷
	۲	۴	۵/۷	۱۱	۱۵/۷	۲۷
	۳	۲	۲/۹	۱۳	۱۸/۶	۲۰
	۴	۴	۵/۷	۱۱	۱۵/۷	۲۷
	۵	۴	۵/۷	۱۱	۱۵/۷	۲۷
	۶	۲	۲/۹	۱۳	۱۸/۶	۲۰
۷	۱	۱۸	۱۱/۱	۲۲	۱۳/۶	۵۱
	۲	۱۸	۱۱/۱	۲۰	۱۲/۳	۵۵
	۳	۸	۴/۹	۲۳	۱۴/۲	۴۳
	۴	۱۸	۱۱/۱	۲۱	۱۳/۰	۵۵
	۵	۱۸	۱۱/۱	۲۲	۱۳/۶	۵۴
	۶	۸	۴/۹	۲۳	۱۴/۲	۴۳

جدول حاضر، توزیع فراوانی و درصد پاسخ‌های شرکت‌کنندگان به سوالات مربوط به میزان استقلال آن‌ها در جلسات مختلف را نشان می‌دهد. این جدول به تفکیک جلسات و سوالات طرح شده در هر جلسه، میزان پاسخ‌ها را در سطوح مختلف استقلال (خیلی زیاد، زیاد، متوسط، کم، خیلی کم) نشان می‌دهد. با بررسی دقیق داده‌ها، می‌توان الگوهای پاسخ‌دهی شرکت‌کنندگان در طول جلسات را شناسایی کرد و به ارزیابی میزان استقلال ادراک شده توسط آن‌ها در طول برنامه پرداخت. به عنوان مثال، در جلسات اولیه، ممکن است تمرکز بر پاسخ‌های متوسط و کم باشد، در حالی که در جلسات پایانی، درصد پاسخ‌های زیاد و خیلی زیاد افزایش یابد، که نشان دهنده افزایش حس استقلال در طول برنامه است.

توزیع پاسخ به سوالات میزان استقلال



شکل ۱- توزیع پاسخ به سوالات میزان استقلال در جلسات مختلف برحسب درصد

در این بخش، یک بررسی بر روی تغییرات استقلال در ۶ جلسه پیاپی، بر اساس نتایج ۷۰ نفر در گروه آزمایش، از شرکت کنندگان انجام شده است. این داده‌ها حاوی میانگین رتبه، آماره آزمون، درجه آزادی و سطح معنی‌داری برای هر سوال در هر جلسه هستند. در این بررسی، از آزمون فریدمن استفاده شده است. این آزمون برای مقایسه میانگین رتبه‌های چند گروه وابسته به کار می‌رود.

جدول ۴- نتایج آزمون فریدمن در مقایسه نتایج هریک از سوالات استقلال در جلسات مورد مطالعه

میانگین رتبه استقلال					
سوال ۱	سوال ۲	سوال ۳	سوال ۴	سوال ۵	سوال ۶
-	-	-	-	-	-
جلسه اول					
جلسه سوم	۲/۵۴	۲/۶۴	۲/۸۰	۲/۶۹	۲/۷۹
جلسه چهارم	۲/۷۴	۲/۵۹	۲/۹۸	۲/۶۴	۳/۰۶
جلسه پنجم	۳/۲۳	۳/۳۱	۳/۳۱	۳/۲۸	۳/۳۱
جلسه ششم	۳/۱۸	۳/۲۱	۲/۶۴	۳/۱۹	۲/۶۵
جلسه هفتم	۳/۳۱	۳/۲۴	۳/۲۶	۳/۲۳	۳/۱۹
آماره آزمون	۱۳/۱۲۱	۱۳/۹۳۱	۹/۵۱۴	۹/۵۴۳	۱۱/۴۳۸
درجه آزادی	۴	۴	۴	۴	۴
سطح معنی‌داری	۰/۰۱۱	۰/۰۰۸	۰/۰۴۹	۰/۰۴۹	۰/۰۶۹

با توجه به نتایج به دست آمده، مشاهده می‌شود که برای سوال‌های مربوط به استقلال، تفاوت معنی‌داری بین میانگین رتبه‌های تمامی سوالات به جز سوال آخر، در جلسات مورد مطالعه مشاهده می‌شود، به گونه‌ای که کمترین نمرات در جلسات اولیه کسب شده و پس از آن نمرات افزایش داشته است، این نشان می‌دهد که شرکت کنندگان در طول جلسات، عملکرد بهتری در استقلال داشته‌اند. برای بررسی و مقایسه‌ی شش سوال پرسشنامه استقلال ریاضی از آزمون فریدمن استفاده شد. جدول فوق نتایج این آزمون را در جلسات مورد مطالعه نشان می‌دهد.

همان‌طور که در بالا اشاره شد، برای بررسی نظرات دانش‌آموزان و کسب اطلاعات بیشتر درباره‌ی سوالات مدل‌سازی و تأثیر آن بر روی علاقه آن‌ها از یک مصاحبه نیمه ساختار یافته بر روی تعدادی از دانش‌آموزان با سه سطح عملکردی، ضعیف، متوسط و قوی در ریاضی، استفاده شد. دانش‌آموزان به صورت داوطلبانه خواستار شرکت در مصاحبه شدند که به طور هدفمند آن‌ها انتخاب شدند. سوالات این مصاحبه عبارت است از

- نظر شما درباره‌ی استقلال در حل مسائل مدل‌سازی با راه حل‌های چندگانه چیست؟

- آیا مشارکت در حل گروهی مسائل مدل‌سازی باز پاسخ در استقلال شما در حل مساله درس ریاضی موثر است؟

در مصاحبه نیمه ساختار یافته از هر سه کلاس در گروه آزمایش، سه دانش‌آموز از سطوح مختلف شامل دانش‌آموز با عملکرد قوی و متوسط و ضعیف انتخاب شدند و با آنان مصاحبه‌ای صورت گرفته شد. هم‌چنین، صدای مصاحبه کنندگان ضبط و مستند شد که در پایان این فایل ضمیمه می‌گردد.

از آنجائی که سوالات نیمه ساختار یافته بودند، دانش‌آموزان به سادگی به بیان احساسات خود پرداختند. مصاحبه گر یعنی نویسنده اول این پژوهش، پاسخ‌های دانش‌آموزان به سوالات را هدایت کرده و هر جا لازم بود برای شفاف شدن صحبت‌های آن‌ها سوالات دیگر می‌پرسید. خلاصه‌ای از نظرات دانش‌آموزان در جدول ۱۷ گنجانده شده است.

جدول ۵- نتایج حاصل از مصاحبه درباره‌ی استقلال

۹.۳	۹.۲	۹.۱
استقلال: چون ما در طول سال کار گروهی داشتیم، شما می‌گفتید کارگروهی انجام می‌دادیم ولی با انجام مسائل مدل‌سازی حس کردم که استقلال فکری‌ام بیشتر شد یعنی این که خودم فکر کنم، دنبال راه حل و جواب خودم باشم. این که خب مسئله شاید جواب‌های مختلف داشت باعث می‌شد که محدودیت نداشته باشیم، بتوانیم خیلی راحت ایده‌هایمان را بیان کنیم و شاید جواب ما درست در می‌آمد باعث می‌شد که بیشتر در مورد آن مسائل فکر کنیم و زود پا پس نکشیم که ما جواب را نتوانستیم به دست بیاوریم. شاید یک جواب دیگر می‌توانستیم به دست بیاوریم که آن حتی بهتر بود و درست‌تر.	استقلال: من قبلاً اگر می‌خواستم در جمع یک چیزی را بگویم خیلی استرس داشتم ولی بعد از این، خیلی راحت‌تر توانستم در جمع نظر خودم را بیان کنم. شاید اعتماد به نفس من آنقدر زیاد نبوده نمی‌توانستم نظر خودم را حتی در خانواده ام خیلی رسا و گویا بیان کنم. بعد از این که در گروه اول با بچه‌هایی که همسن خود من بودند توانستم نظر خودم را با جرأت بگویم بعد توانستم در خانواده هم به همین شکل باشم یعنی در موارد دیگر هم بتوانم نظرم را باز گو کنم. من هم اول که مثلاً در کارهای گروهی بودیم رونویسی می‌کردم مثلاً می‌ایستادم سرگروه من حل بکند بعد می‌گفت این راه حل است و بعد من هم بدون اینکه آن راه حل را خودم نظری داشته باشم می‌نوشتیم. ولی یک مقداری که گذشت فهمیدم من هم این خلاقیت را دارم من هم این استعداد را دارم که بیایم و یک نظری بدهم حتی اگر آن نظر اشتباه بود مهم این است که حرف خودم را زده‌ام و آن را بیان کردم. بعد از آن توانستم کم کم خودم مثلاً به این استقلال رسیدم که خودم بنویسم و راه حل خودم را خودم تصحیح کنم. بگویم اشکال ندارد حتی اگر این جا اشتباه بود باز من خودم این کار را انجام بدهم.	استقلال: حس ترس در من از بین رفت و در ذهنم یک حرفی بود که آره تو هم می‌توانی انجامش بدهی اگر این طوری پیش برود. اصلاً جلسه اولش اصلاً این حس را تجربه نکردم ولی از جلسه دوم به بعد مخصوصاً آن مسئله شامپو که بودش به شدت این طوری بودم که خودم باید حلش کنم و واقعا به آن راه حل رسیدم و خیلی حس خوبی در من ایجاد کرد که توانستم درسی که علاقه‌ای به آن ندارم و احساس ترس بوده، مسئله حل کنم.
استقلال: این که در راه حل‌های چندگانه هر ایده‌ای به ذهن هر کس برسد مطرح شود و از آن استفاده شود و استقبال هم از آن شود به نظرم خیلی خوب است. ما بسیار با دوستانمان هم‌فکری کنیم و من یک روزی حوصله نداشتم این‌ها را جواب دهم، دوستانم من را به اجبار آوردند و با هم فکر کردیم و به نتیجه رسیدیم اگر آن اتفاق نمی‌افتاد به نظرم من شاید اصلاً به استقلال نمی‌رسیدم و این خیلی روی من تأثیر داشت.	استقلال: در اولین جلسات به این شکل بود که هیچ تلاشی نمی‌کردم برای اینکه آنها را حل کنم و فقط مثلاً از سرگروه یا از بچه‌های دیگر می‌دیدم اما رفته رفته به این فکر کردم که چرا باید من به بقیه نگاه کنم خود من هم یک تلاشی بکنم که بعد حالا به این شکل شده که سرگروه هم مثلاً می‌آمد می‌گفت که چقدر راه حل تو خوب است و ایده‌هایت خوب است بیا باهم دوباره آن را کمی بررسی کنیم و همان را بدهیم این به نظر من خوب بود که توانستم گفتم اول باید این کار را می‌کردم توانستم راه حل‌های خودم را بررسی کنم و با بقیه بچه‌ها هم همفکری کردیم. من همیشه در خانه هم نظرم را نمی‌گفتم اما الان به راحتی نظرم را می‌گویم.	استقلال: وقتی که می‌فهمی فکر تو درست بود، احساس قدرت می‌کردم. شاید جلسه ی اول نمی‌توانستم نظرم را مطرح کنم ولی خب جلسه ی دوم به بعد قشنگ حرفم را می‌زدم حتی اگر اشتباه می‌گفتم. من در کلاس راحت نظراتم را می‌گویم، راحت تمرین می‌کنم و من کسی شدم که برای بقیه توضیح می‌دهد در صورتی که من قبلاً کسی بودم که باید برایم توضیح می‌دادند.

استقلال: کار در گروه باعث توانمند شدن ما می‌شود. علاوه بر استقلال فکری، اعتماد به نفس را هم بالا می‌برد. وقتی می‌توانید در گروه نظراتان را بیان کنید و مورد تأیید قرار می‌گیرید، این خیلی به اعتماد به نفس و عزت نفس شما کمک می‌کند. در نتیجه این اعتماد به نفس در ریاضی، در سایر کلاس‌ها هم، به شرکت در کلاس کمک می‌کند.	استقلال: خیلی از مواقع همفکری که می‌کردیم در آخر بچه‌ها می‌گفتند خوب باید این حرکت را بکنیم. فکر می‌کردیم می‌گفتم نه من می‌خواهم این حرکت را انجام دهم. حتی اگر نظرم غلط هم می‌بود ناراحت نبودم. چون چیزی را که خودم می‌خواستم انجام داده بودم به آن مساله رسیده بودم که خودم نوشتم هرچقدر هم غلط باشد ولی خودم انجام دادم.	استقلال: دلم می‌خواست خودم حل کنم بتوانم اگر همه جا که دوستانم نیستند تنهایی بتوانم از پس آن مسائل قوی در زندگی خودم بربیایم. حس کردم اگر یک موقع مشکل پیش‌بینی نشده برایم به وجود بیاید بتوانم از پیش‌بینی بربیایم.
---	---	--

باتوجه به نتایج استخراج شده و مقوله‌هایی که از مصاحبه استنباط می‌شود، می‌توان گفت این مسائل، یعنی کار در گروه‌های کوچک برای حل مسائل مدل‌سازی، درمیزان صلاحیت‌های فردی از جمله خودکارآمدی و استقلال دانش‌آموزان تأثیرگذار بوده است. از طرف دیگر، پاسخ باز بودن سوالات مدل‌سازی که ارائه راه حل‌های مختلف توسط دانش‌آموزان شده را در پی داشت، باعث رشد استقلال در آن‌ها شده بود. بنابراین، همه‌ی این عوامل در نهایت موجبات افزایش استقلال دانش‌آموزان را فراهم کرده است.

بحث و نتیجه‌گیری

پژوهش حاضر با هدف بررسی تأثیر آموزش راه‌حل‌های چندگانه در حل مسائل مدل‌سازی ریاضی بازپاسخ، در بستر فعالیت‌های گروهی کوچک، بر استقلال و خودکارآمدی دانش‌آموزان دختر پایه نهم انجام شد. نتایج کمی نشان داد که میانگین رتبه‌های استقلال دانش‌آموزان در جریان جلسات آموزشی روندی عموماً افزایشی داشت و آزمون فریدمن در پنج مورد از شش گویه پرسشنامه، تفاوت معناداری میان مراحل مختلف مداخله نشان داد. سطوح معناداری گزارش شده برای گویه‌های دارای تغییر معنادار در دامنه ۰/۰۰۸ تا ۰/۰۴۹ قرار داشت و تنها در یکی از گویه‌ها تفاوت میان جلسات از نظر آماری معنادار نبود. این یافته نشان می‌دهد که مداخله آموزشی توانسته است بیشتر مؤلفه‌های عملی استقلال، از جمله تصمیم‌گیری درباره شیوه مشارکت، انتخاب روش انجام فعالیت، مدیریت فرایند حل و بررسی یا اصلاح مستقل راه‌حل‌ها را بهبود بخشد؛ بااین‌حال، همه ابعاد استقلال با سرعت و شدت یکسان تغییر نکرده‌اند. یافته‌های کیفی نیز نتایج کمی را تأیید کردند؛ دانش‌آموزان بیان کردند که در طول جلسات، وابستگی آنان به سرگروه و معلم کاهش یافته، جرئت ارائه نظر افزایش پیدا کرده، ترس از اشتباه کمتر شده و توانایی آنان برای تولید، بررسی و اصلاح راه‌حل شخصی تقویت شده است. همچنین، برخی دانش‌آموزان تجربه موفقیت در حل مسائل را عامل افزایش اعتماد به توانایی‌های خود و انتقال این احساس شایستگی به سایر کلاس‌ها، محیط خانواده و موقعیت‌های زندگی دانستند.

بهبود استقلال دانش‌آموزان را می‌توان ابتدا بر اساس ویژگی‌های مسائل مدل‌سازی بازپاسخ تبیین کرد. برخلاف تمرین‌های بسته که در آنها داده‌ها، روش و پاسخ نهایی معمولاً از پیش تعیین شده‌اند، مسائل مورد استفاده در این پژوهش دانش‌آموزان را با موقعیت‌هایی دارای داده‌های اضافی، مفقود یا چند مسیر معتبر برای حل مواجه می‌کردند. در چنین شرایطی، دانش‌آموز نمی‌تواند صرفاً منتظر ارائه فرمول از سوی معلم باقی بماند، بلکه باید مسئله را تفسیر کند، درباره کفایت داده‌ها تصمیم بگیرد، فرض‌هایی بسازد و اعتبار پاسخ خود را ارزیابی کند. رویکرد مدل‌ها و مدل‌سازی نیز بر همین فرایند فعال ساخت دانش تأکید دارد و یادگیرنده را سازنده بازنمایی‌ها و روابط ریاضی می‌داند، نه مصرف‌کننده منفعل یک روش آماده (Lesh & Doerr, 2003). شایستگی مدل‌سازی نیز مستلزم آن است که دانش‌آموز مراحل فهم موقعیت، ساده‌سازی، ریاضی‌سازی، حل، تفسیر و اعتبارسنجی را با درجه‌ای از اختیار و مسئولیت انجام دهد (Lesh et al., 2013). بنابراین، ساختار تکالیف این پژوهش به‌طور مستقیم فرصت تمرین استقلال شناختی را فراهم کرده و دانش‌آموزان را ناگزیر ساخته است که در بخش‌های مختلف فرایند حل، تصمیم‌های شخصی و گروهی اتخاذ کنند.

این یافته با دیدگاهی همسو است که مدل‌سازی ریاضی را پلی میان ریاضیات مدرسه‌ای و موقعیت‌های واقعی می‌داند. هنگامی که مسئله در قالب یک موقعیت معنادار ارائه می‌شود، دانش‌آموز صرفاً به دنبال اجرای یک الگوریتم نیست، بلکه باید مشخص کند کدام بخش از واقعیت را می‌توان با زبان ریاضی

بازنمایی کرد و نتیجه محاسبات چه معنایی در موقعیت اولیه دارد (Niss et al., 2007). تأکید بر سواد ریاضی نیز نشان می‌دهد که توانایی استفاده از ریاضیات برای تفسیر و تصمیم‌گیری در موقعیت‌های زندگی، نیازمند استقلال در انتخاب ابزار و قضاوت درباره معقول بودن نتایج است (Stacey, 2015). بر همین اساس، گزارش دانش‌آموزان درباره اینکه این مسائل به آنان کمک کرده است ریاضی را فراتر از فرمول و محاسبه ببینند، می‌تواند نشانه تغییر در برداشت آنان از ماهیت فعالیت ریاضی باشد. این تغییر نگرش احتمالاً سبب شده است که دانش‌آموزان خود را در مقام تصمیم‌گیرنده و حل‌کننده واقعی مسئله تجربه کنند و احساس عاملیت بیشتری در فرایند یادگیری به دست آورند.

بخش دیگری از نتایج را می‌توان به نقش رویکرد راه‌حل‌های چندگانه نسبت داد. وجود بیش از یک مسیر قابل قبول برای حل، محدودیت ناشی از جست‌وجوی «پاسخ مورد نظر معلم» را کاهش می‌دهد و به دانش‌آموز اجازه می‌دهد از دانش پیشین، بازنمایی‌ها و استدلال شخصی خود استفاده کند. تکالیف دارای راه‌حل‌های چندگانه، دانش‌آموزان را به تولید، مقایسه و ارزیابی روش‌های متفاوت وادار می‌کند و از این طریق انعطاف‌پذیری شناختی و فهم مفهومی را توسعه می‌دهند (Leikin & Zaslavsky, 2013). گفته‌های دانش‌آموزان مبنی بر اینکه «حتی اگر ایده اشتباه بود، مهم بود که نظر خود را بیان کنند» نشان می‌دهد که فضای چندراه‌حلی، خطا را از نشانه ناتوانی به بخشی از فرایند اکتشاف تبدیل کرده است. چنین تغییری می‌تواند ترس از شکست را کاهش دهد و تمایل به آزمون ایده‌های شخصی را افزایش دهد. از دیدگاه آموزش تفکر ریاضی نیز حل‌کننده ماهر کسی نیست که فقط مجموعه‌ای از روش‌ها را حفظ کرده باشد، بلکه باید بتواند راهبرد مناسب را انتخاب کند، بر فرایند خود نظارت داشته باشد و در صورت لزوم مسیر حل را تغییر دهد (Schoenfeld, 2016). بنابراین، تمرین مستمر تولید و اصلاح راه‌حل‌ها احتمالاً زمینه رشد استقلال و خودکارآمدی را به‌طور هم‌زمان فراهم کرده است.

یافته‌های این پژوهش با نتایج مطالعات مربوط به کیفیت تدریس ریاضیات نیز همخوان است. آموزش اثربخش زمانی رخ می‌دهد که دانش‌آموزان درگیر تلاش شناختی معنادار شوند، میان ایده‌ها ارتباط برقرار کنند و به جای اجرای مکانیکی روش‌ها، دلایل و روابط زیربنایی را درک کنند (Hiebert & Grouws, 2007). در مداخله حاضر، دانش‌آموزان ابتدا به‌صورت فردی مسئله را بررسی می‌کردند، سپس ایده‌های خود را در گروه مطرح می‌ساختند و در نهایت راه‌حل‌ها را مقایسه و ارزیابی می‌کردند. این توالی اجازه می‌داد که هر دانش‌آموز پیش از قرارگرفتن تحت تأثیر نظر گروه، فرصت تولید ایده شخصی داشته باشد. همچنین، مقایسه پاسخ‌ها باعث می‌شد دانش‌آموزان نه‌تنها نتیجه، بلکه منطق و کارآمدی روش‌های مختلف را بررسی کنند. مدیریت هدفمند بحث‌های ریاضی، انتخاب راه‌حل‌های مناسب برای ارائه و برجسته‌کردن ارتباط میان روش‌ها از اصول مهم شکل‌دهی گفت‌وگوهای مولد کلاسی است (Stein & Smith, 2011). از این‌رو، بخشی از بهبود مشاهده‌شده را می‌توان حاصل تبدیل کلاس از محیط انتقال پاسخ به محیط تحلیل و مذاکره درباره راه‌حل‌ها دانست.

فعالیت گروهی کوچک نیز در توضیح نتایج نقش اساسی دارد. مصاحبه‌ها نشان دادند که تأیید همسالان، شنیده‌شدن ایده‌ها و مشارکت در ساخت پاسخ مشترک، اعتماد دانش‌آموزان را افزایش داده است. برخی دانش‌آموزان ضعیف و متوسط بیان کردند که در ابتدا پاسخ‌های اعضای قوی‌تر را رونویسی می‌کردند، اما به‌تدریج توانستند ایده شخصی خود را مطرح و حتی برای دیگران توضیح دهند. یادگیری مشارکتی زمانی معنادار است که تعامل اعضا به تبادل استدلال، توضیح متقابل و مسئولیت مشترک برای فهم منجر شود (Sharan, 2015). در این نوع محیط، همسالان می‌توانند نقش منابع حمایتی را ایفا کنند؛ باین‌حال، پاسخ نهایی صرفاً محصول تقلید نیست، زیرا هر دانش‌آموز باید در گفت‌وگو مشارکت کرده و از راه‌حل دفاع کند. در نتیجه، حمایت اجتماعی گروه به‌جای افزایش وابستگی، در صورت سازمان‌دهی مناسب می‌تواند مقدمه‌ای برای استقلال فردی باشد. دانش‌آموز ابتدا با کمک همسالان وارد فعالیت می‌شود، سپس با دریافت بازخورد و تجربه موفقیت، توانایی انجام مستقل تکلیف را در خود ادراک می‌کند.

نتایج همچنین با نظریه‌های یادگیری خودتنظیم سازگار است. استقلال یادگیری شامل تعیین هدف، برنامه‌ریزی، انتخاب راهبرد، نظارت بر عملکرد و اصلاح رفتار بر اساس بازخورد است (Zimmerman, 2002). در این پژوهش، دانش‌آموزان در هر مسئله ناچار بودند نحوه شروع، روش کار، تقسیم وظایف، انتخاب فرض‌ها و شیوه بررسی پاسخ را مدیریت کنند. افزایش رتبه‌های استقلال در طول جلسات می‌تواند نشان دهد که تکرار این فرایندها به تدریج کنترل یادگیری را از معلم به دانش‌آموز منتقل کرده است. چارچوب خودتنظیمی پینتریچ نیز یادگیری را حاصل تعامل شناخت، انگیزش، رفتار و شرایط محیطی می‌داند (Pintrich, 2004). بر این اساس، پیشرفت استقلال در این پژوهش را نمی‌توان فقط به تغییر یک مهارت شناختی نسبت داد؛ بلکه آزادی انتخاب

راهبرد، بازخورد گروه، تجربه پیشرفت و کاهش ترس از خطا احتمالاً در کنار یکدیگر عمل کرده‌اند. همچنین، پژوهش‌های مربوط به کاربرد یادگیری خودتنظیم در کلاس نشان می‌دهند که این توانایی باید در دل فعالیت‌های واقعی و معنادار تمرین شود (Paris & Paris, 2001). مسائل مدل‌سازی بازپاسخ نیز شرایطی فراهم کردند که دانش‌آموزان خودتنظیمی را در یک تکلیف اصیل تجربه کنند.

معنادارنبودن تغییر در یکی از گویه‌های استقلال نیز از نظر نظری قابل تأمل است. استقلال سازه‌ای چندبعدی است و برخی اجزای آن، مانند بررسی و اصلاح راه‌حل، ممکن است در یک مداخله کوتاه‌مدت سریع‌تر تغییر کنند؛ زیرا مستقیماً در هر جلسه تمرین می‌شوند. در مقابل، ابعادی مانند هدف‌گذاری بلندمدت، مدیریت کلی یادگیری یا کنترل پایدار انگیزش احتمالاً به زمان بیشتری نیاز دارند. در پژوهش حاضر، هدف‌های اصلی هر جلسه و نوع مسائل تا حد زیادی توسط پژوهشگر تعیین شده بود؛ بنابراین، هرچند دانش‌آموزان در انتخاب راه‌حل اختیار داشتند، ممکن است در تعیین هدف یا طراحی کلی فعالیت از استقلال کامل برخوردار نبوده باشند. از منظر نظریه خودتعیین‌گری، حمایت از خودمختاری زمانی بیشترین تأثیر را دارد که دانش‌آموز علاوه بر انتخاب روش، در درک دلیل فعالیت و تعیین جهت آن نیز مشارکت داشته باشد (Reeve, 2012). در نتیجه، عدم تغییر یکنواخت همه گویه‌ها نه تنها نتیجه کلی پژوهش را تضعیف نمی‌کند، بلکه نشان می‌دهد توسعه استقلال نیازمند سطوح متفاوتی از انتخاب و مشارکت است.

افزایش خودکارآمدی ادراک‌شده که در مصاحبه‌ها آشکار شد، احتمالاً از تجربه موفقیت و دریافت بازخورد مثبت ناشی شده است. دانش‌آموزانی که در ابتدا خود را ناتوان از حل مسئله می‌دانستند، با مشاهده اینکه یک ایده شخصی می‌تواند به پاسخ قابل قبول منجر شود، احساس شایستگی بیشتری پیدا کردند. گزارش‌هایی مانند کاهش ترس از بیان نظر، توانایی توضیح‌دادن برای دیگران و تمایل به حل مستقل مسئله، شاخص‌هایی از تقویت باور به توانایی شخصی هستند. یافته‌های مربوط به رابطه کنجکاوی عقلانی و حل مسئله نیز نشان می‌دهد که درگیری اکتشافی می‌تواند از طریق تقویت فرایندهای انگیزشی و شناختی، عملکرد حل مسئله را ارتقا دهد (Wang et al., 2026). همچنین، رابطه تفکر خلاق و انتقادی با پیشرفت ریاضی از طریق حل مسئله نشان می‌دهد که فرصت تولید و ارزیابی ایده‌ها می‌تواند هم بر عملکرد و هم بر ادراک شایستگی اثر بگذارد (Yousefpour et al., 2024). بر این اساس، موفقیت دانش‌آموزان در تولید یک راه‌حل متفاوت صرفاً یک دستاورد شناختی نبود، بلکه تجربه‌ای انگیزشی بود که برداشت آنان از توانایی خود را تغییر داد.

تقویت تفکر انتقادی نیز می‌تواند یکی از سازوکارهای واسطه‌ای نتایج باشد. دانش‌آموزان برای انتخاب میان راه‌حل‌های مختلف باید مفروضات، محاسبات و اعتبار نتیجه را بررسی می‌کردند. مطالعات مربوط به حل مسائل ریاضی بحث‌برانگیز نشان داده‌اند که موقعیت‌های دارای چند دیدگاه یا چند امکان، دانش‌آموزان را به تحلیل شواهد، ارزیابی استدلال‌ها و اتخاذ موضع منطقی وادار می‌کند (Suryawan et al., 2024). در پژوهش حاضر نیز داده‌های ناقص یا اضافی، دانش‌آموزان را مجبور می‌کردند که درباره ضرورت هر داده و معقول بودن فرض‌های جایگزین قضاوت کنند. این نوع قضاوت می‌تواند وابستگی به قواعد ثابت را کاهش دهد و به دانش‌آموز نشان دهد که اعتبار پاسخ از استدلال و شواهد ناشی می‌شود، نه صرفاً از تأیید معلم. در نتیجه، رشد استقلال با توسعه توانایی ارزیابی انتقادی راه‌حل‌های خود و دیگران پیوند یافته است.

یافته‌ها با نتایج آموزش ریاضی واقع‌گرایانه نیز همسو هستند. پژوهش‌ها نشان داده‌اند که استفاده از موقعیت‌های واقعی و هدایت دانش‌آموز برای ساخت مدل و راه‌حل می‌تواند مهارت حل مسئله را در مقایسه با تدریس متعارف تقویت کند (Ventistas et al., 2024). افزون بر این، آموزش مسئله‌محور زمانی اثربخش‌تر است که منابع آموزشی، دانش‌آموزان را با چالش‌های معنادار و فراتر از تمرین‌های تکراری مواجه سازند (Subramaniam & Rajoo, 2025). حتی در دوره‌های تحصیلی پایین‌تر نیز حل مسئله می‌تواند مفاهیم پایه را در بستر فعالیت‌های اکتشافی و معنادار توسعه دهد (Torres-Pena et al., 2025). این شواهد نشان می‌دهد که نتایج پژوهش حاضر محدود به یک موضوع خاص، مانند قضیه فیثاغورث، نیست؛ بلکه می‌تواند بازتاب یک اصل عمومی‌تر باشد که بر اساس آن، مشارکت فعال دانش‌آموز در ساخت و ارزیابی راه‌حل، استقلال و احساس شایستگی او را افزایش می‌دهد.

تعامل میان مسئله‌سازی و حل مسئله نیز در تبیین نتایج اهمیت دارد. در مسائل دارای داده مفقود، دانش‌آموزان ناگزیر بودند شرایطی را فرض کنند یا صورت مسئله را تکمیل نمایند؛ این فعالیت از برخی جهات به مسئله‌سازی نزدیک است. پژوهش درباره تعامل مسئله‌سازی و حل مسئله نشان داده است که تولید یا بازسازی مسئله می‌تواند فهم ساختارهای ریاضی و آگاهی از روابط میان داده‌ها و اهداف را افزایش دهد (Geteregechi, 2025). وقتی دانش‌آموز مجاز

است فرضی را تغییر دهد و نتیجه آن را بررسی کند، خود را شریک در تولید مسئله می‌بیند، نه فردی که صرفاً باید دستورالعملی ثابت را اجرا کند. این احساس مالکیت احتمالاً در افزایش استقلال و تمایل به پیگیری راهحل شخصی نقش داشته است.

نتایج پژوهش از منظر برنامه درسی ایران نیز قابل توجه است. بررسی‌های تطبیقی مسائل تیمز ۲۰۱۹ با کتاب‌های ریاضی ایران و ژاپن بر اهمیت هم‌سویی مسائل کتاب‌های درسی با سطوح بالاتر تقاضای شناختی و کاربرد مفاهیم در موقعیت‌های متفاوت تأکید کرده‌اند (Yaftian & Abbasi, 2024b). مطالعه دیگر درباره انطباق مسائل پایه چهارم تیمز با محتوای کتاب‌های ایران و ژاپن نیز نشان می‌دهد که پوشش محتوایی به‌تنهایی کافی نیست و نوع فرایند شناختی مورد انتظار از دانش‌آموز باید در طراحی تکلیف مورد توجه قرار گیرد (Yaftian & Abbasi, 2024a). یافته‌های حاضر نشان دادند که مسائل بازپاسخ و چندراه‌حلی می‌توانند علاوه بر مهارت ریاضی، متغیرهای انگیزشی و خودتنظیمی را نیز تحت تأثیر قرار دهند. بنابراین، افزایش سهم این نوع مسائل در کتاب‌های درسی و ارزشیابی‌ها می‌تواند به تغییر نقش دانش‌آموز از مجری روش به تولیدکننده و ارزیاب راهحل کمک کند.

در مجموع، همگرایی داده‌های کمی و کیفی نشان می‌دهد که ترکیب آموزش صریح چرخه مدل‌سازی، استفاده از مسائل بازپاسخ، تولید راهحل‌های چندگانه و فعالیت گروهی کوچک توانسته است محیطی نسبتاً حمایت‌کننده از استقلال ایجاد کند. آموزش صریح مراحل مدل‌سازی، ساختار لازم را برای جلوگیری از سردرگمی فراهم کرده و آزادی انتخاب راهحل، امکان اعمال عاملیت را در اختیار دانش‌آموزان قرار داده است. تعامل گروهی نیز بازخورد و حمایت اجتماعی لازم برای بیان ایده‌ها را فراهم ساخته و تکرار تجربه موفقیت، خودکارآمدی دانش‌آموزان را افزایش داده است. از این‌رو، اثربخشی مداخله را نمی‌توان به یک مؤلفه منفرد نسبت داد؛ بلکه به نظر می‌رسد تعامل میان ساختار آموزشی، آزادی شناختی، تجربه موفقیت و گفت‌وگوی همسالان، سازوکار اصلی تغییر بوده است.

این پژوهش با محدودیت‌هایی همراه بود که باید در تفسیر نتایج مورد توجه قرار گیرد. شرکت‌کنندگان با روش نمونه‌گیری در دسترس و تنها از میان دانش‌آموزان دختر پایه نهم یک منطقه آموزشی انتخاب شدند؛ بنابراین، تعمیم نتایج به دانش‌آموزان پسر، پایه‌های دیگر، مدارس غیردولتی و مناطق دارای شرایط اجتماعی و آموزشی متفاوت باید با احتیاط انجام شود. اجرای مداخله طی هفت جلسه، امکان بررسی پایداری بلندمدت تغییرات را فراهم نکرد و مرحله پیگیری نیز در طرح پژوهش پیش‌بینی نشده بود. نبود گروه کنترل مستقل، استنباط قطعی درباره اینکه همه تغییرات مشاهده‌شده صرفاً ناشی از مداخله بوده‌اند را محدود می‌کند. همچنین، تعداد پرسشنامه‌های تکمیل‌شده در برخی جلسات یکسان نبود و این تغییر در حجم پاسخ‌ها می‌تواند قابلیت مقایسه کامل سنجش‌های متوالی را کاهش دهد. استقلال عمدتاً با ابزار خودگزارشی سنجیده شد و خودکارآمدی بیشتر از طریق مصاحبه‌ها و برداشت‌های دانش‌آموزان استنباط گردید؛ از این‌رو، استفاده نکردن از یک مقیاس استاندارد و مستقل خودکارآمدی از محدودیت‌های مهم پژوهش است. افزون بر این، پژوهشگر هم‌زمان نقش مدرس، مشاهده‌گر و مصاحبه‌گر را بر عهده داشت که می‌تواند احتمال سوگیری مشاهده‌گر، پاسخ‌های مطلوب اجتماعی و تأثیر رابطه معلم-دانش‌آموز بر پاسخ‌ها را افزایش دهد.

پیشنهاد می‌شود پژوهش‌های آینده از طرح‌های آزمایشی یا نیمه‌آزمایشی دارای گروه کنترل، گمارش تصادفی و سنجش پیگیری استفاده کنند تا پایداری اثرات و سهم واقعی مداخله با دقت بیشتری مشخص شود. تکرار مطالعه در نمونه‌های بزرگ‌تر و متنوع‌تر، شامل دانش‌آموزان دختر و پسر، پایه‌های مختلف، مدارس دولتی و غیردولتی و مناطق برخوردار و کم‌برخوردار، می‌تواند اعتبار بیرونی یافته‌ها را افزایش دهد. لازم است استقلال، خودکارآمدی، عملکرد حل مسئله، اضطراب ریاضی، تفکر خلاق و تفکر انتقادی با ابزارهای استاندارد و به‌صورت هم‌زمان سنجیده شوند. همچنین، بررسی جداگانه اثر آموزش مدل‌سازی، راهحل‌های چندگانه و یادگیری مشارکتی می‌تواند سهم اختصاصی هر مؤلفه و اثر تعاملی آنها را روشن سازد. تحلیل فرایند گفت‌وگوهای گروهی، کیفیت استدلال‌ها، الگوهای مشارکت اعضا و تغییر راهبردهای حل در طول زمان نیز می‌تواند سازوکارهای اثرگذاری مداخله را دقیق‌تر نشان دهد. استفاده از طرح‌های طولی، تحلیل چندسطحی، فیلم‌برداری نظام‌مند از فعالیت‌ها و بررسی نقش متغیرهایی مانند سطح توانایی اولیه، جنسیت، کنجکاوی، حمایت معلم و اندازه گروه نیز توصیه می‌شود.

پیشنهاد می‌شود معلمان ریاضی به‌طور تدریجی مسائل بازپاسخ و دارای راهحل‌های چندگانه را در برنامه تدریس روزانه وارد کنند و پیش از آغاز بحث گروهی، زمانی مشخص برای تفکر و تولید راهحل فردی در نظر بگیرند. گروه‌ها بهتر است ناهمگن و کوچک باشند و برای هر عضو نقش مشخصی مانند

تحلیل‌گر داده، ارائه‌دهنده، ارزیاب راه‌حل یا ثبت‌کننده تعیین شود تا از سلطه دانش‌آموزان قوی و کناره‌گیری سایر اعضا جلوگیری شود. معلمان باید فضای کلاس را به گونه‌ای مدیریت کنند که اشتباه به عنوان بخشی طبیعی از یادگیری پذیرفته شود و ارزش یک پاسخ بر اساس کیفیت استدلال، نه صرفاً تطابق با روش معلم، ارزیابی گردد. طراحی کتاب‌های درسی و ارزشیابی‌ها نیز باید شامل مسائل دارای داده‌های مفقود، اضافی یا چند پاسخ معتبر باشد. برگزاری دوره‌های توانمندسازی معلمان برای آموزش چرخه مدل‌سازی، مدیریت گفت‌وگوهای ریاضی و ارزیابی راه‌حل‌های متنوع ضروری است. همچنین، استفاده از روییک فرایندمحور، خودارزیابی دانش‌آموزان و بازخورد همسالان می‌تواند بررسی و اصلاح مستقل راه‌حل‌ها را به بخشی پایدار از فرهنگ یادگیری ریاضی تبدیل کند.

موازین اخلاقی

در این پژوهش ملاحظات اخلاقی رعایت شد.

تشکر و قدردانی

از تمام افرادی که امکان انجام پژوهش حاضر را فراهم کردند، تقدیر و تشکر می‌شود.

مشارکت نویسندگان

نویسندگان این مطالعه با هم مشارکت فعال داشتند.

تعارض منافع

بین نویسندگان پژوهش حاضر هیچ تضاد منافی وجود نداشت.

Reference

- Geteregechi, J. (2025). An examination of undergraduate students' problem-posing and its interaction with problem-solving processes. *International electronic journal of mathematics education*, 20(1), 1–15. <https://doi.org/10.29333/iejme/15738>
- Hiebert, J., & Grouws, D. A. (2007). The Effects of Classroom Mathematics Teaching on Students' Learning. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 371-404). Information Age. <https://doi.org/10.1108/978-1-28141-200-320251013>
- Leikin, R., & Zaslavsky, O. (2013). *Multiple Solutions Tasks in Mathematics Education*. Springer.
- Lesh, R., & Doerr, H. (2003). *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving*. Lawrence Erlbaum. <https://doi.org/10.4324/9781410607713>
- Lesh, R., Galbraith, P., Haines, C., & Hurford, A. (2013). *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-6271-8>
- Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education*. Springer.
- Ozturk, M., Yildiz, K. A., & Charitaki, G. (2026). Self-Regulation and Mathematics Anxiety: The Conditional Mediating Role of Mathematical Language Self-Efficacy and Implications for Inclusive Education. *Adolescents*, 6(3), 39.
- Paris, S. G., & Paris, A. H. (2001). Classroom Applications of Research on Self-Regulated Learning. *Educational Psychologist*, 36(2), 89-101. https://doi.org/10.1207/S15326985EP3602_4
- Pintrich, P. R. (2004). A Conceptual Framework for Assessing Motivation and Self-Regulated Learning. *Educational psychology review*, 16(4), 385-407. <https://doi.org/10.1007/s10648-004-0006-x>
- Reeve, J. (2012). A Self-Determination Theory Perspective on Student Engagement. In *Handbook of Research on Student Engagement* (pp. 149-172). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-2018-7_7
- Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to Think Mathematically. *Journal of Education*, 196(2), 1-38. <https://doi.org/10.1177/002205741619600202>
- Sharan, Y. (2015). Meaningful Learning in the Cooperative Classroom. *Education 3-13*, 43(1), 83-94. <https://doi.org/10.1080/03004279.2015.961723>
- Soleimani Far, M. (2025). Investigating the Role of Attitude, Self-Efficacy, and Mathematical Self-Concept in Improving Mathematical Educational Performance. *Modern Research in Performance Evaluation*, 4(2), 124-138.

- Stacey, K. (2015). *The International Assessment of Mathematical Literacy*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-10121-7>
- Stein, M. K., & Smith, M. S. (2011). *5 Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions*. NCTM.
- Subramaniam, V. A., & Rajoo, M. (2025). Need Analysis for Developing a Problem-Based Learning E-Module in Mathematics With Integrated Global Citizenship Education. *Picl*, 2(1), 40-48. <https://doi.org/10.37934/picl.2.1.4048>
- Suryawan, I. P. P., Sudiarta, I. G. P., Suharta, I. G. P., & Pujawan, I. G. N. (2024). Students' Critical Thinking Ability in Solving Controversial Mathematical Problems Seen From Computational Thinking. *International Journal of Religion*, 5(11), 3038-3051. <https://doi.org/10.61707/dd3d5t59>
- Taghizadeh, H., & Shokri, A. (2013, 2013/12). Identification of the Predominant Conflict in Educational Institutes by Using Cook-Seiford's Method: A Case Study. *LISS 2013: Proceedings of the 3rd International Conference on Logistics, Informatics and Service Science*, Berlin, Heidelberg.
- Taghizadeh, H., & Shokri, A. (2014). The Study of Spiritual Leadership Impact on Organizational Justice and Organizational Commitment of Employees of Company Gas Ardabil Province. *Human Resource Management in Oil Industry*, 5(19), 227-255.
- Torres-Pena, R. C., Pena-Gonzalez, D., & Ariza-Echeverri, E. A. (2025). Mathematical Thinking in Preschool: Strengthening Seriation and Counting Through Problem Solving. *International Journal of Early Childhood*. <https://doi.org/10.1007/s13158-025-00312-3>
- Ventistas, G., Ventista, O. M., & Tsani, P. (2024). The impact of realistic mathematics education on secondary school students' problem-solving skills: a comparative evaluation study. *Research in Mathematics Education*, 1-25. <https://doi.org/10.1080/14794802.2024.2306633>
- Wang, Y., Zhou, L., Xie, B., Wang, L., & Jin, H. (2026). The Relationship between Intellectual Curiosity and Adolescents' Mathematical Problem-Solving Ability: A Moderated Mediation Model. *PLoS One*, 21(3), e0344349. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0344349>
- Yaftian, N., & Abbasi, F. (2024a). Adapting mathematical problems published in the TIMSS 2019 4th-grade study with the content and issues of mathematics textbooks in Iran and Japan. *Journal of Educational Innovations*(92).
- Yaftian, N., & Abbasi, F. (2024b). Alignment of Fourth-Grade Published Mathematics Problems from TIMSS 2019 with the Content and Problems of Iranian and Japanese Mathematics Textbooks. *Educational Innovations*, 23(2), 7-31. https://noavaryedu.oerp.ir/article_195789.html
- Yousefpour, N., Derakhshan, N., & Pour-Saberi, R. (2024). An Explanatory Model of Mathematical Achievement Based on Creative and Critical Thinking with Problem-Solving Mediation in Elementary School Students in Tabriz. *Sociology of Education and Development*, 10(1), 45-53. <https://sid.ir/paper/1496113/en>
- Zhou, Y., Jing, B., Du, Y., Fan, M., & Qi, Y. (2025). Exploring the Relationships Among Creative Self-Efficacy, Mathematical Creative Thinking, and Mathematical Achievement. *School Psychology International*. <https://doi.org/10.1177/01430343251405168>
- Zimmerman, B. J. (2002). Becoming a Self-Regulated Learner. *Theory Into Practice*, 41(2), 64-70. https://doi.org/10.1207/s15430421tip4102_2